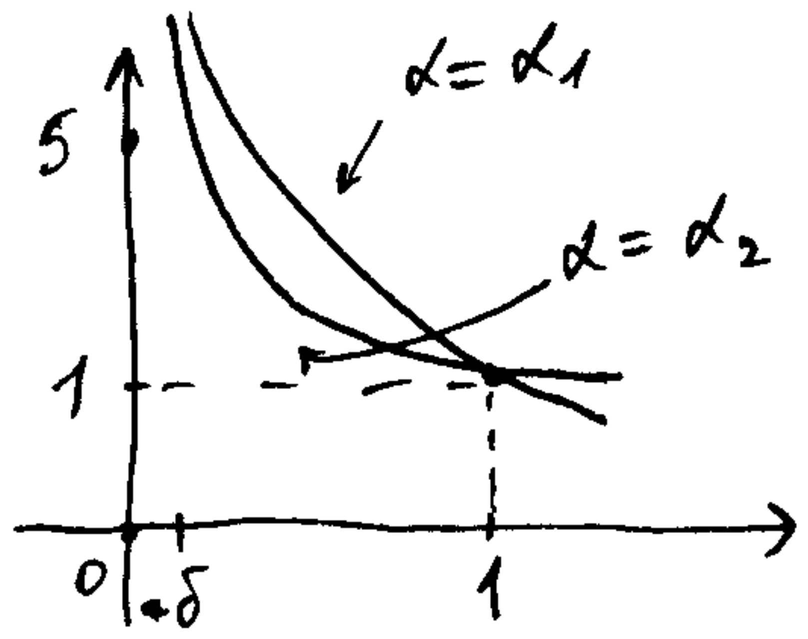
Лекция 1

§8 Несобственные интегралы

Пример:

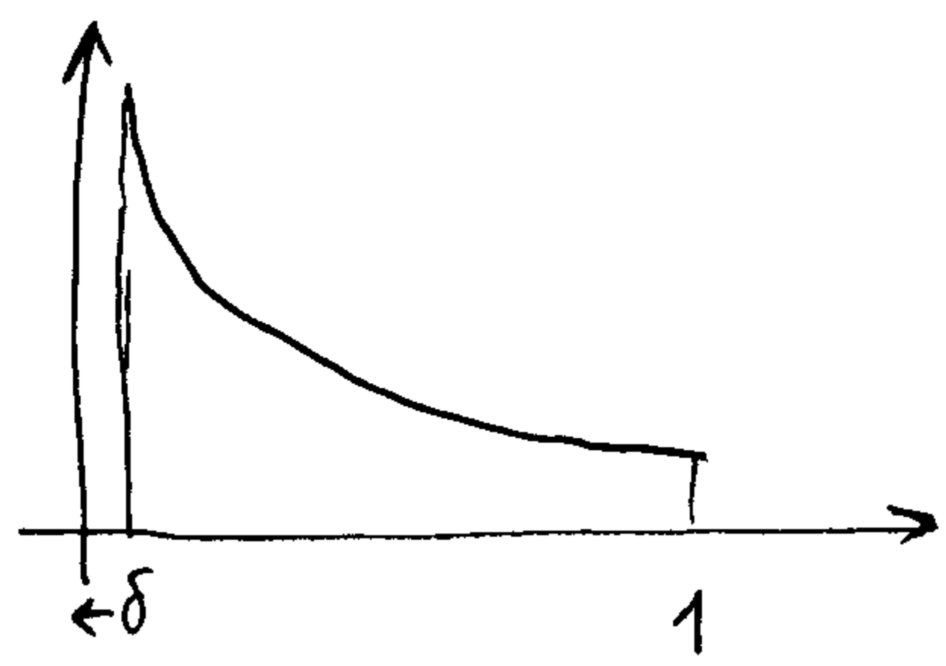


$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha}, & x \in (0,1] \\ 5, & x = 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

$f_\alpha \notin R[0,1]$ $\forall \alpha > 0$, т.к. не вып. необ. усл. инт-ти

Обобщение понятия площади подобной криволинейной трапеции (обобщ. понятия интеграла Римана) получается так

рассм. $\int\limits_\delta^1 f(x)\,dx = I(\delta)$



если $f \in R[\delta, 1]$

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\delta \to +0} \int\limits_\delta^1 f(x)\,dx$$ в случае $\exists$-ия этого предела

Итак, иссл. при каких α $\exists \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

$$I(\delta) = \int\limits_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} =$$

а) если $\alpha = 1$

$$\int\limits_\delta^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_\delta^1 = -\ln\delta \xrightarrow[\delta \to +0]{\text{при}} +\infty$$

б) если $\alpha \in (0,1)$

$$\int\limits_\delta^1 x^{-\alpha}\,dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow[\delta \to 0]{\text{при}} 0$$

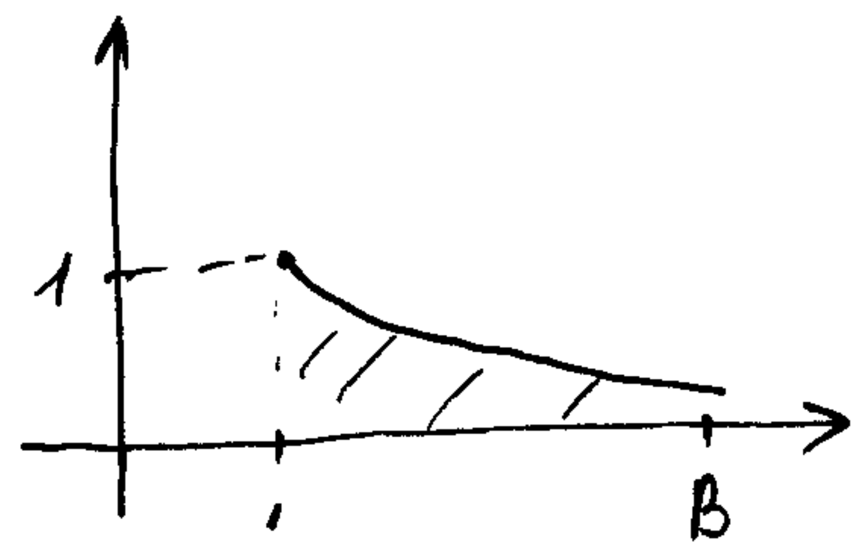
в) если $\alpha > 1$

$$\int\limits_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\delta^{\alpha-1}(\alpha-1)} \longrightarrow +\infty$$

В результате
$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha \in (0,1) \end{cases}}$$

Другой тип несобственности (неограниченный промежуток)

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\quad x \in [1, \infty)$



По опр-ю
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B \to +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^\alpha}$$

а) $\alpha = 1$ $\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{B \to +\infty} \ln B - \ln 1 = +\infty$

б) $\alpha \in (0,1)$ $\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{B^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-1} \right) = +\infty$

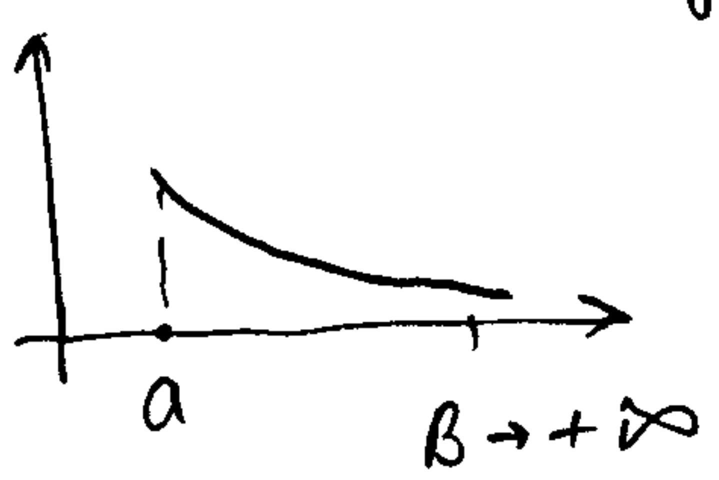
в) $\alpha > 1$ $\quad \frac{1}{\alpha-1}$

В результате
$$\boxed{\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{если } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$

<u>Опр</u> (несобств. интеграла I рода) Т.е. с неогр. областями определения

Пусть $f(x) \in R[a, B]$ $\quad \forall B \geq a$

$f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$

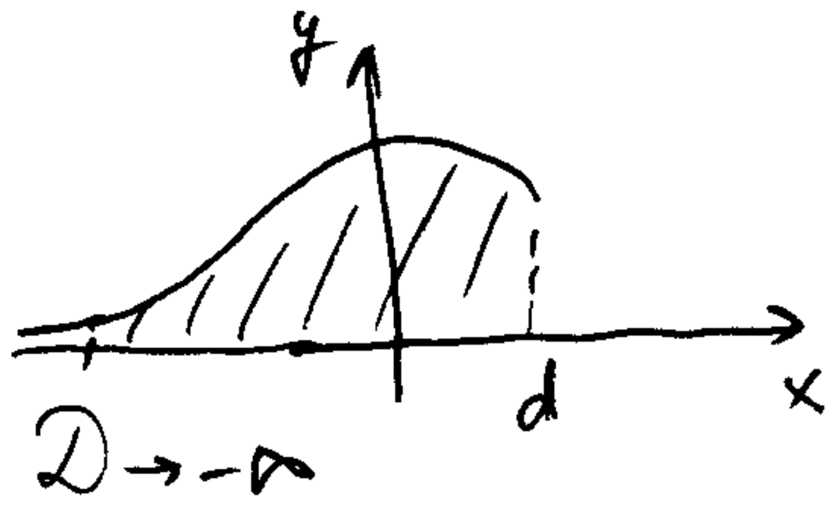


Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{B \to +\infty} \int_a^B f(x)\,dx$,

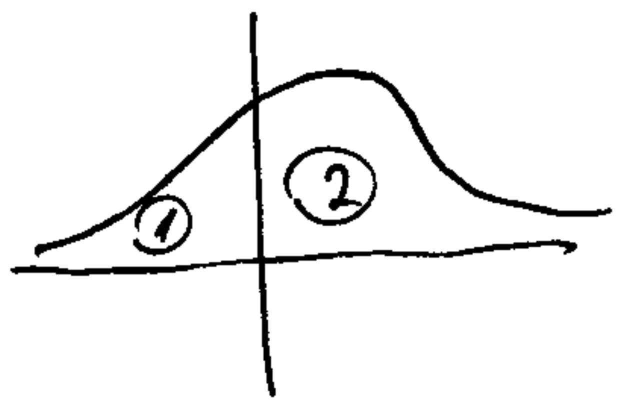
если такой предел сущ-т;

если же этот предел не сущ-ет, то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх-ся

Аналогично определяется $\int\limits_{-\infty}^{d} f(x)\,dx = \lim\limits_{D\to-\infty} \int\limits_D^d f(x)\,dx$



Если рассматривать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, то по опр-ю $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{\infty}$



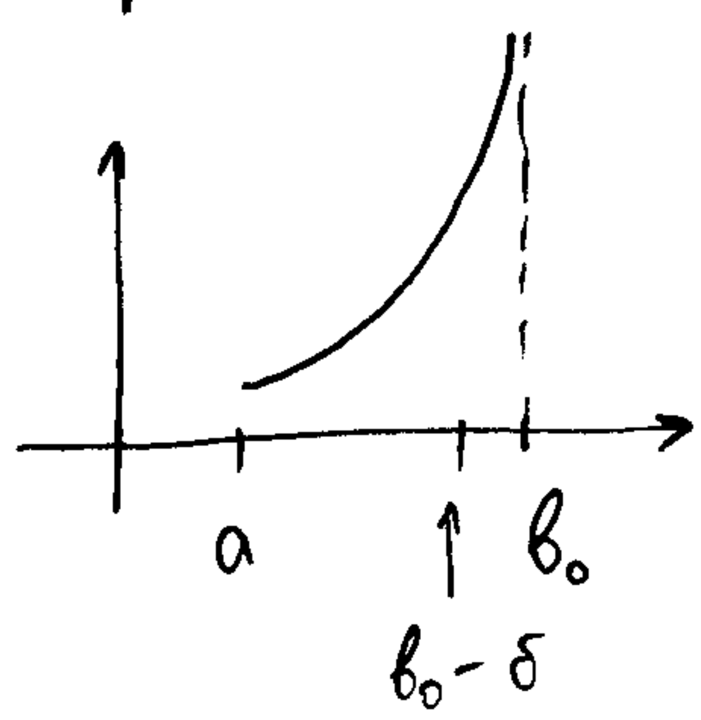
<u>Опр</u> (несоб. инт. II рода, т.е. от неогр. ф-ий)

Пусть $f: [a, b_0) \to \mathbb{R}$

имеет разрыв слева в т. b_0:

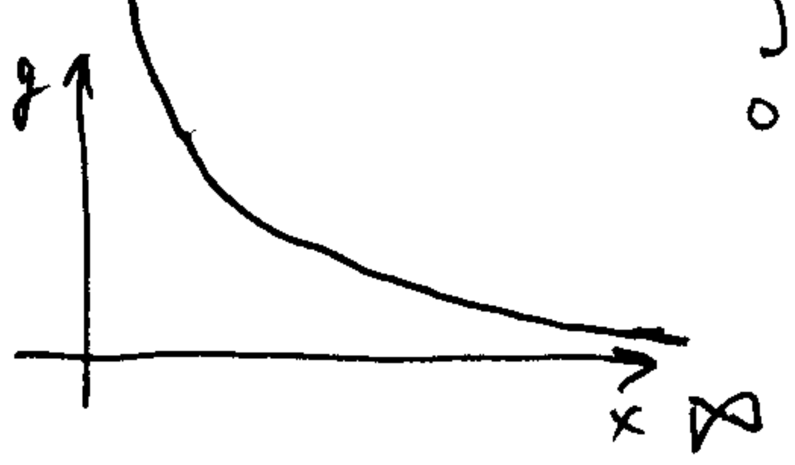
$\lim\limits_{x\to b_0-0} f(x) = \infty$ и $f \in R[a, b_0-\delta]$

$\forall\ 0<\delta<b_0-a$



Тогда по опр-ю $\int\limits_a^{b_0} f(x)\,dx = \lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_a^{b_0-\delta} f(x)\,dx$

Рассматривают такие несобственные интегралы, у которых есть несобственности одновременно и 1-го и 2-го рода $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$

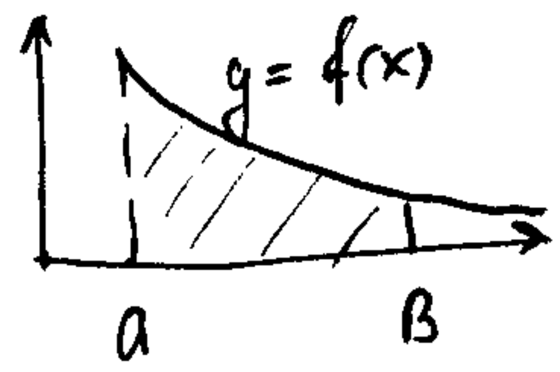


Признаки сходимости несобственных интегралов I рода положительных функций.

Рассм. несобств. интегралы вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$

где $f:[a,+\infty)\to \mathbb{R}^+=[0,+\infty)$

$f\in R[a,B]\ \ \forall B>a$

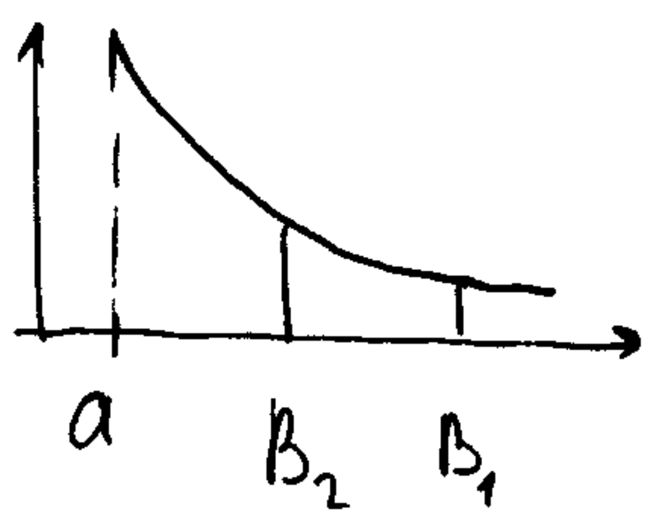


Теорема 1

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся $\Leftrightarrow$ $I(B)=\int\limits_a^{B} f(x)\,dx$ – ограниченная (сверху) функция от B

Док-во.

Возьмем $B_1>B_2>a \Rightarrow I(B_1)=\underbrace{\int\limits_a^{B_2} f(x)\,dx}_{I(B_2)}+\underbrace{\int\limits_{B_2}^{B_1} f(x)\,dx}_{\geq 0}$



$\Rightarrow I(B_1)\geq I(B_2) \Rightarrow I(B)$ монот. возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $I(B)$ огранич., то $\exists \lim\limits_{B\to\infty} I(B)=\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$

а если $I(B)$ неогранич., то $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx=+\infty$