Лекция 2

Теорема 2 (теорема сравнения для положит. ф-ий)

Пусть $f(x), g(x) \in R[a,B]$ $\forall B > a$ и $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ $\forall x > a$.

Тогда

1) Если $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся.

Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх, то $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ расх.

2) Если $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix}$, то сходимость (расх-ть) $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ одновременная

Док-во

1) По Теореме 1 $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ огранич

$\Rightarrow 0 \leq \int\limits_a^{B} f(x)\,dx \leq \int\limits_a^{B} g(x)\,dx \Rightarrow$ тоже огранич. $\overset{\text{Теор 1}}{\Rightarrow} \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сход.

2) Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{d(x)} = K \underset{(\neq\infty)}{\neq 0} \Rightarrow \forall \varepsilon_0 > 0$ $\exists M > 0$ т.ч.

$\forall x > M$ $K - \varepsilon_0 < \dfrac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon_0$.

При $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{K}{2} \Rightarrow \dfrac{K}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3K}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{K}{2}\cdot g(x) < f(x) < \dfrac{3K}{2} g(x)$

Если $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ сх-ся $\Rightarrow \int\limits_a^{\infty} \dfrac{3K}{2}\cdot g(x)\,dx = \dfrac{3K}{2}\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ тоже сх-ся $\Rightarrow$

$\overset{\text{см 1)}}{\Rightarrow} \int\limits_M^{\infty} f(x)\,dx$ сх-ся $\Leftrightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сх-ся

Если же $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ $\Rightarrow$ из левого неравенства $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) < \frac{2}{K} f(x) \overset{\text{аналог.}}{\underset{\cdots}{\Rightarrow}}$ $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сх-ся.

Расходимость доказывается от противного.

<u>Замечание</u>. Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то из сх-ти $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx \Rightarrow$ сх-ть $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, а если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, из сх-ти $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx \Rightarrow$ сх-ть $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$

<u>Примеры</u> Исследовать на сходимость $\int\limits_1^\infty \underbrace{\frac{\sqrt{x}+2\ln x}{x^3+\sqrt{x}}}_{f(x)}\,dx$

сравним с $\int\limits_1^\infty g(x)\,dx$, где $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$

Имеем: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \left(\frac{\sqrt{x}+2\ln x}{x^3+\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x^5} = \lim \frac{x^3+2\ln x\cdot x^{\frac{5}{2}}}{x^3+\sqrt{x}} = 1$

И поскольку $\int\limits_1^\infty g(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{5/2}}$ сх-ся (здесь показатель $\alpha = \frac{5}{2} > 1$)

то по Теор. 2 $\Rightarrow$ $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ тоже сх-ся

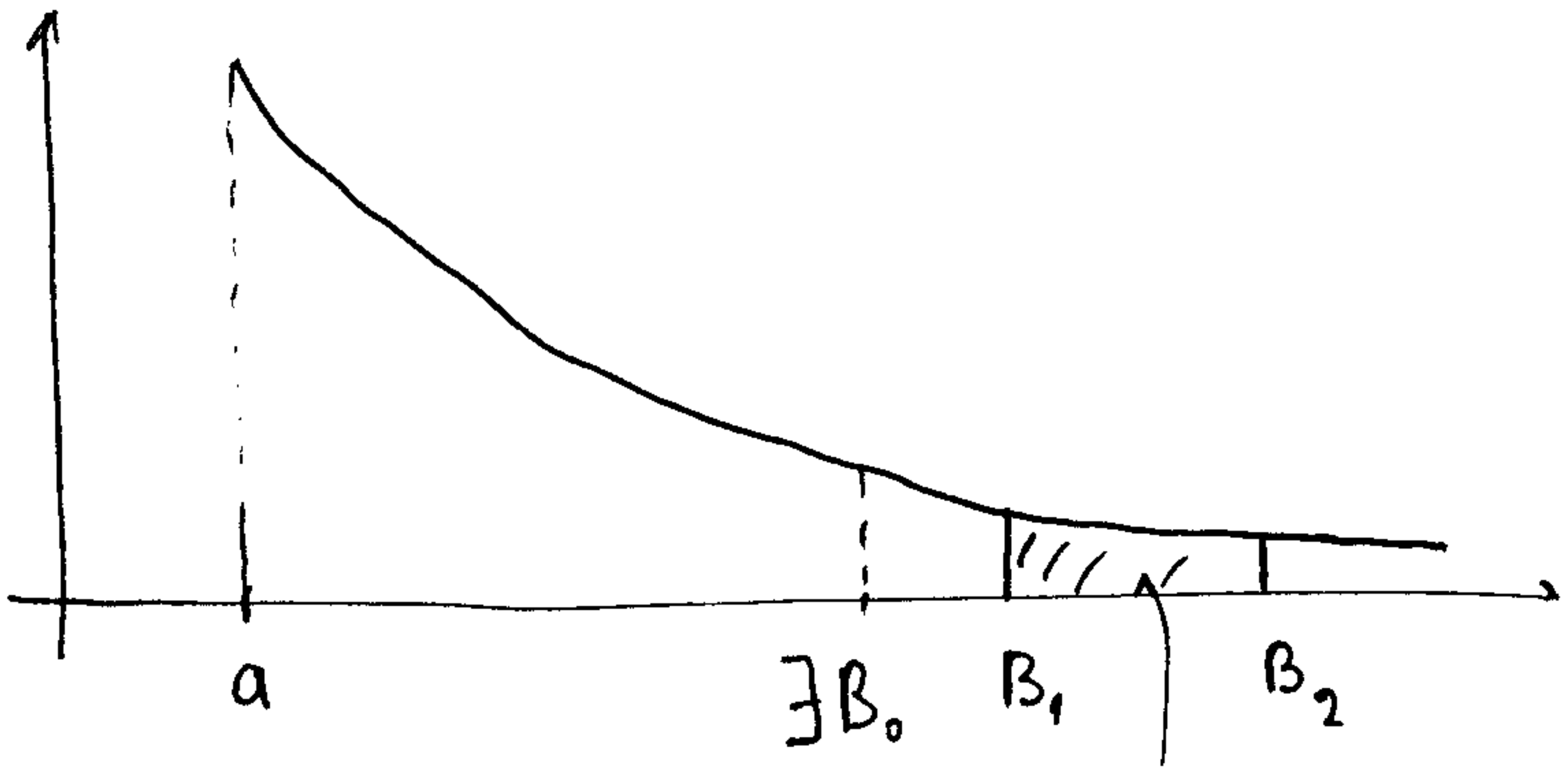
<u>Несоб. инт. от произвольных знаков ф-ий</u>

Критерий Коши для несобств. интегралов 1-го рода.

$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сх-ся $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists B_0 > a$ т.ч. $\forall B_1, B_2 > B_0$

$$\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

(следует из критерия Коши для $\exists \lim\limits_{B\to+\infty} I(B) = \lim\limits_{B\to+\infty} \underbrace{\int_a^B f(x)dx}_{I(B)}$)



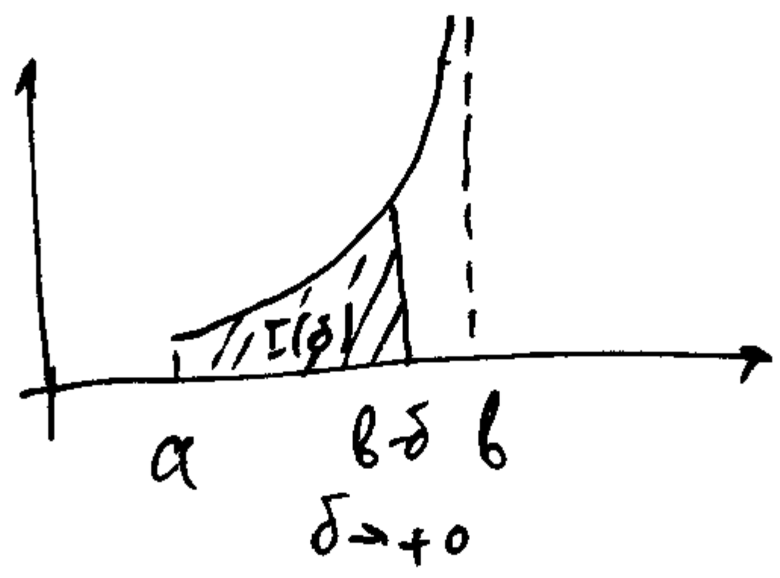
$S_{B_1B_2} < \varepsilon \quad \forall B_1, B_2 > B_0$

Замечания для несобств. интегралов 2-го рода

Теорема 1 и Теор. 2 выше формулируются полностью аналогично:

Теор 1 (для положит. $f(x)$ при точке разрыва b: $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$

$\int_a^b f(x)\,dx$ сход $\Leftrightarrow$ $\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx = I(\delta)$ а огранич. (при $\delta\to+0$)

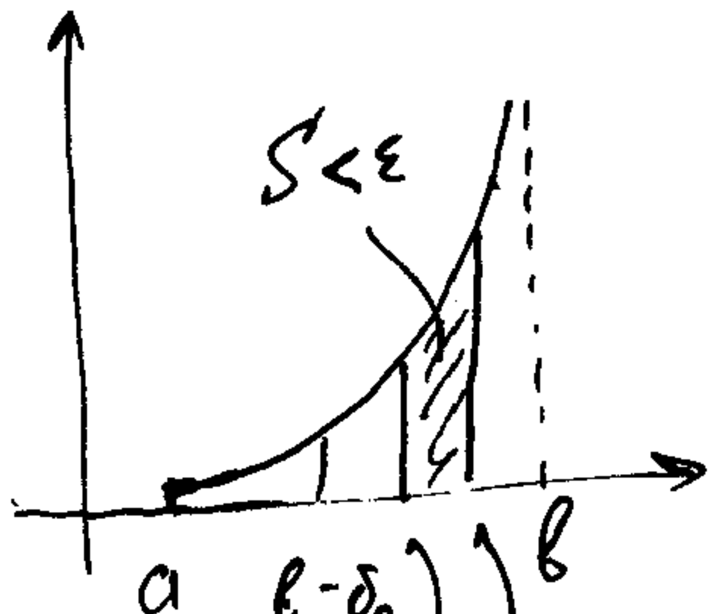


Теор 2 :

дословно (когда $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Критерий Коши для несобст. инт. 2-го рода

(когда $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$)



$\int_a^b f(x)dx$ сх-ся $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta_0 >$ т.ч.

$\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, \delta_0)$

$\left| \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx \right.$

Абсолютная сходимость $\Leftrightarrow$ $\int\limits_a^{\omega} |f(x)|\,dx$ сх-ся

<u>Теор. 3</u>: Из абс. сх-ти несобств. инт. $\Rightarrow$ сх-ти обычного

<u>Док-во</u>:

По критерию Коши требуется для $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ док-ать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_0 > a$ т.ч. $\forall B_1, B_2 > B_0$

$$(*) \quad \left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Но по св-ву нер-в (для инт. ф-ий)

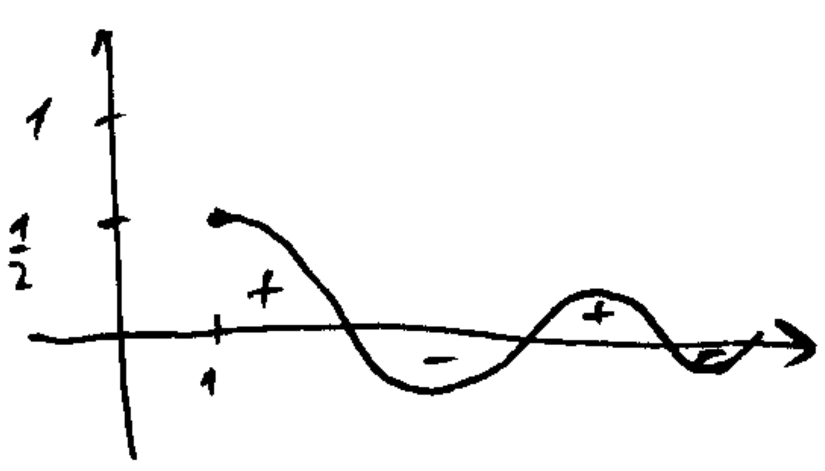
$$\left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx \right| \le \int\limits_{B_1}^{B_2} |f(x)|\,dx$$

Т.о. применяя критерий Коши для $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ находим B_0 т.ч. $\forall B_1, B_2 > B_0$

$$\int\limits_{B_1}^{B_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon \Rightarrow (*) \text{ для найденного } B_0 \qquad \square$$

Для инт. 2-го рода док-ать самостоятельно

<u>Пример</u> Исследовать на сх-ть а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx$



Рассм абс. сх-ть : $\underbrace{\frac{|\sin x|}{x^{\frac{3}{2}}}}_{f(x)} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из сх-ти $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ (т.к. $\frac{3}{2} > 1$) Следует по Теор 2 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \quad \text{сх-ся}$$