Лекция 3

$\int\limits_a^\omega$, где $\omega = \infty$ или несобст. 2 рода

Общие свойства несобственных интегралов

а) линейность $\int\limits_a^\omega \left(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\right) dx = \lambda_1 \int\limits_a^\omega f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int\limits_a^\omega f_2(x)\, dx$

(. . . . . "объяснения" . .)

б) аддитивность

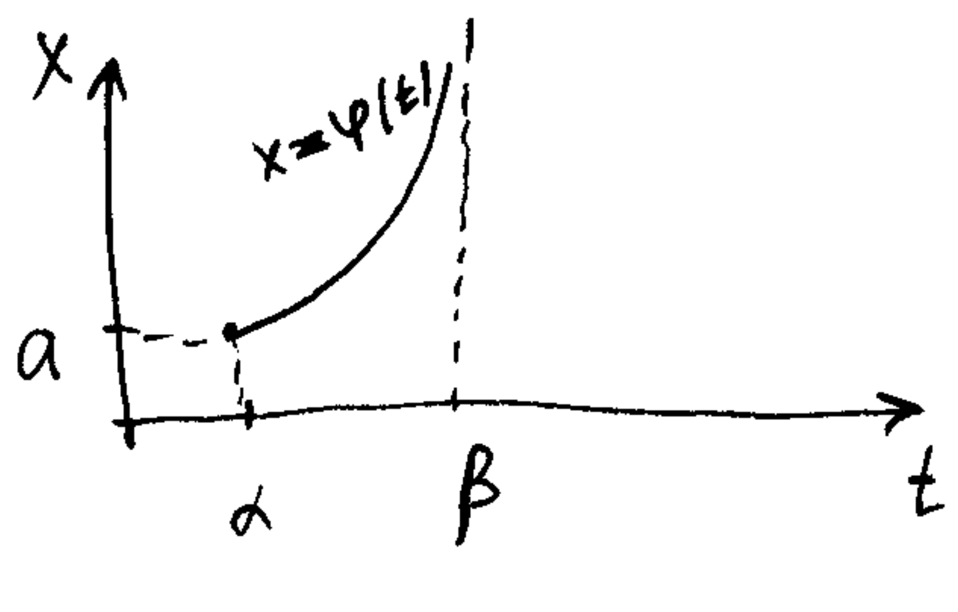
$$\int\limits_a^\omega f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx + \int\limits_b^\omega f(x)\, dx$$

в) замена переменной

Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, \omega)$ – строго монотонная ф-ия

$\in C^1([\alpha, \beta))$ – т.е. непрерывн. производная

и $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = \omega$ $\left(\varphi(\beta - 0) = \omega\right)$



Тогда $\int\limits_a^\omega f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$

г) интегрирование по частям

$$\int\limits_a^\omega u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^\omega - \int\limits_a^\omega v(x) \cdot u'(x)\, dx,$$

где $u, v \in C^1[a, \omega]$ и $u(\omega) \cdot v(\omega) = \lim\limits_{x \to \omega} u(x) \cdot v(x)$

Признаки Абеля и Дирихле

~~[illegible]~~ Исследуется сходимость несоб. интегралов вида (*) $\int\limits_a^\infty f(x)\cdot g(x)\,dx$, где $g(x)$ – монотонная ф-ция на $[a,\infty)$

В признаках Абеля и Дирихле сформулированы достаточные условия сходимости (*)

Признак Абеля

А1) Пусть $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сх-ся

А.2) $g(x)$ - монотонна и ограничена на $[a,\infty)$

$\Rightarrow$ (*) сх-ся

Признак Дирихле

Д1) $I(B) = \int\limits_a^B f(x)\,dx$ огран.

Д2) $g(x)$ монот. $\searrow 0$ при $x\to\infty$

$\Rightarrow$ (*) сх-ся

Для док-ва признаков Абеля и Дирихле применяется 2-я теорема о среднем (для опред. интегралов)

см. Зорич.

2-я теорема о среднем. Пусть $f(x), g(x) \in R[b_1, b_2]$ причем $g(x)$ монот. на $[b_1, b_2]$. Тогда $\exists\, \xi \in (b_1, b_2)$ т.ч.

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\cdot g(x)\,dx = g(b_1)\cdot\int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(b_2)\int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)\,g(x) \qquad (**)$$

Док-ва признаков Абеля - Дирихле по критерию Коши

для $\forall \varepsilon > 0$ требуется найти $B_0 > a$ т.ч.

$\forall B_1, B_2 > B_0$

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x) g(x) \right| < \varepsilon \quad \overset{(**)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left| g(B_1) \cdot \int_{B_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(B_2) \cdot \int_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Для этого достат. чтобы

$$|g(B_1)| \cdot \left| \int_{B_1}^{\xi} f(x)\,dx \right| + g(B_2) \cdot \left| \int_{\xi}^{B_2} f(x)\,dx \right| \qquad (***)$$

В признаке Абеля пусть $|g(x)| < C \quad \forall x \geq a$.

Тогда из сх-ти $\int_a^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow$ можно найти B_0

т.ч. $\left| \int_{B'}^{B''} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2c} \quad \forall B', B'' > B_0 \Rightarrow$ для этого B_0

$(***)$ запишется при $B_1, B_2 > B_0$

$$|g(B_1)| \cdot \left| \int_{B_1}^{\xi} f(x)\,dx \right| + |g(B_2)| \cdot \left| \int_{\xi}^{B_1} f(x)\,dx \right| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

В признаке Дирихле:

пусть $\left| \int_a^B f(x)\,dx \right| < M \qquad \forall B > a$

Тогда $\forall B', B'' > a \qquad \left| \int_{B'}^{B''} f(x)\,dx \right| < 2M$, т.к.

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^{B_2} f(x)\,dx - \int_a^{B_1} f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^{B_2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_a^{B_1} f(x)\,dx \right| < M + M$$

(***) заменится —"—

$$\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon$$, как только B_0

выбрано так, что $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$ $\forall x > B_0$

Примеры (см. выше)

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

здесь $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \searrow 0$.

$$f(x) = \sin x : \left|\int_1^B \sin x\,dx\right| = \left|-\cos x\right|_1^B \le 2 = M$$

Интеграл по Коши (или в смысле главного значения)

напр. $$V.P. \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x} = 0$$

$$\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\frac{dx}{x}$$