Лекция 4

Замечание по записи реш. неопр инт

$$\int_a^{+\infty\,(\text{или } \omega)} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty\,(\text{или } \omega)}$$ запись допускается,

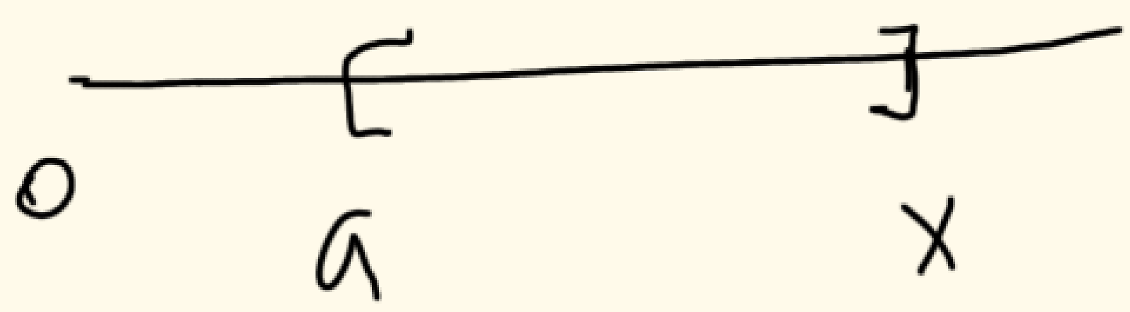
когда $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

и аналогично при интегрировании по частям

$$\int_a^{\omega} u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^{\omega} - \int_a^{\omega} v(x)u'(x)\,dx$$

P.S. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме

Пусть $f(x) \in C^{n+1}_{[a,\,x]}$



Тогда $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt = -\int_a^x f'(t)\,(x-t)'\,dt =$

$$= -f'(x)\cdot(x-t)\Big|_a^x - \int_a^x (x-t)\cdot f''(t) =$$

инт по частям

$$= f'(a)\cdot(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\big((x-t)^2\big)'\,dt =$$

$$= f'(a)\cdot(x-a) - \frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 \Big|_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\cdot \int_a^x f'''(t)\left((x-t)^3\right)' dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{3!} f'''(a)(x-t)^3 \Big|_a^x +$$

$$+ \frac{1}{3!}\int_a^x f^{IV}(t)(x-t)^3 dt = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{3!}\int_a^x f^{IV}(t)(x-t)^3 dt = \ldots =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \underbrace{r_n(x,a)}_{\text{остаток}}, \text{ где}$$

$$r_n(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Выведем из интегральной формы остат. члена формулу Лагранжа

$$r_n(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \underset{\text{1 теор (обобщ.) о среднем}}{=}$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} (x-t)^{n+1} \Big|_a^x =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \qquad (\text{где } \xi \in (a,x))$$

Здесь использовано обобщение 1-ой теор. о среднем для непр ф-ии $f(x)$ и положит (неотриц) непр ф-ии $g(x)$ на $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx, \text{ где } \xi \in [a,b]$$

(при $g(x) \equiv 1 \Rightarrow$ 1-ая теор о среднем)

$\boxed{\text{Глава V}}$

§1. Пространство $\mathbb{R}^n$ и его св-ва

<u>Опр</u> $\mathbb{R}^n = \{ \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2 \dots n \}$,

и определены операции:

1) сложение $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$

2) умножение на скаляр из $\mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad \alpha \cdot \bar{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n\}$

$\mathbb{R}^n$ с данными 2 операциями явл-ся n-мерным векторным (линейным) пространством (над $\mathbb{R}$), т.е. вып-ся св-ва ($\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n$ - группа по сложению

a1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

a2) $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$

a3) $\exists \bar{0} = (0, \ldots, 0)$ т.ч. $\forall \bar{x}$ $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$

a4) $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\exists (-\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ т.ч. $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

дистр.

b1) $\alpha(\bar{x} \pm \bar{y}) = \alpha\bar{x} \pm \alpha\bar{y}$

b1') $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$

b2) $\alpha \cdot \beta(\bar{x}) = \alpha \cdot (\beta\bar{x})$

b3) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$\bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$

$\vdots$

$\bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести скалярное произв. векторов

<u>Опр.</u> скалярного произведения на векторном пр-ве – это ф-ция, ставящая в соответствие упорядоченной паре $\bar{x}, \bar{y} \mapsto$ число $\in \mathbb{R}^n$

т.е. ф-ция $\mathbb{R}^n \cdot \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ обознач. $(\bar{x}, \bar{y})$

со свойствами:

$\forall x, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$

2) $(\alpha \bar{x}, \bar{y}) = \alpha (\bar{x}, \bar{y})$

3) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$

4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ причем равенство

$(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$

Линейное пр-во с введенным скалярн. произв. наз Евклидовым

В Евклидовом пр-ве можно определить понятие длины (модуля) вектора

$$|\bar{x}| \overset{def}{=} \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} \overset{в\ \mathbb{R}^n}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

в $\mathbb{R}^n$ $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Лекция 5

$|x| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ – модуль (длина, норма) вектора

$\Rightarrow$ можно ввести расстояние между векторами

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x} - \bar{y}|$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

в $\mathbb{R}^n$ $\quad |\bar{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Почему $(\mathbb{R}^n, \rho)$ – метрич. пр-во

Аксиомы метрики:

1) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ причем $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

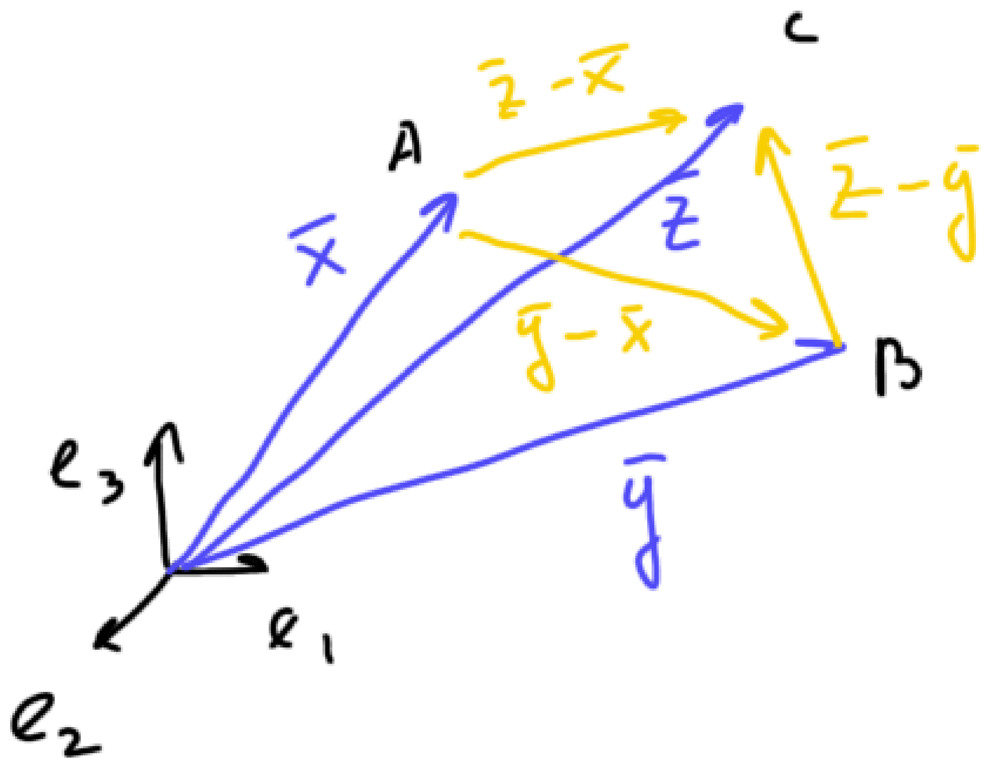
2) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$

3) $\rho(\bar{x}, \bar{z}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \rho(\bar{y}, \bar{z})$

'3)' аксиома в $\mathbb{R}^n$ записывается так:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}$$

Геометрич. иллюстрация в $\mathbb{R}^3$



$$|\bar{z} - \bar{x}| \leq |\bar{z} - \bar{y}| + |\bar{y} - \bar{x}| \Leftrightarrow$$

$$AC \leq BC + AB$$

Неравенство Коши – Буняковского – Шварца

В евклидовом пространстве E вып-ся

$$|(a,b)| \le |a|\cdot|b| \quad \forall a,b \in E \qquad (*)$$

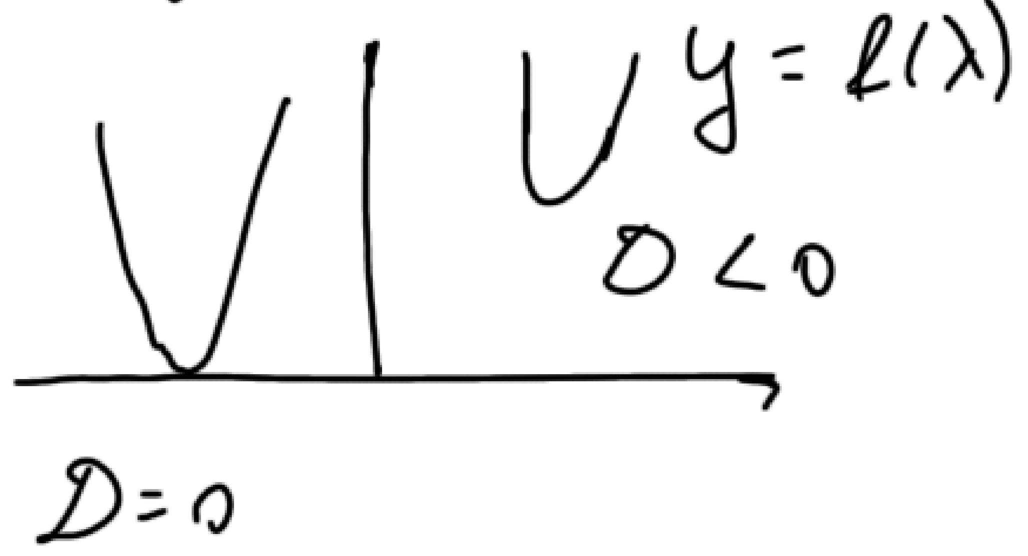
Док-во.

Рассм. ф-цию $f(\lambda) = |a-\lambda b|^2 = (a-\lambda b,\ a-\lambda b)$

$f(\lambda) = \lambda^2 (b,b) - 2\lambda(a,b) + (a,a) \ge 0$

$(\forall\lambda)$ причем $=0 \iff a-\lambda b = 0$

квадратич. ф-ция



$\Rightarrow D \le 0$

Таким образом $(D = b^2 - 4ac)$

$D = 4(a,b)^2 - 4(b,b)\cdot(a,a) \le 0$

$(a,b)^2 \le |b|^2\cdot|a|^2 \iff |(a,b)| \le |a|\cdot|b|$

доказали (*)

Уточнение нер-ва К-Б-Ш

$|a,b| \le |a|\cdot|b|$, причем равенство $|a,b| = |a|\cdot|b| \iff$ a и b коллинеарны ($\exists \lambda\in\mathbb{R}$ т.ч. $a=\lambda b$)

Вернемся к аксиоме '3)' метрики $\iff$ (см. выше)

$|\bar x+\bar y| \le |\bar x|+|\bar y|$ в квадрате $\iff$

$(x+y,\ x+y) \le |x|^2+|y|^2+2|x||y| \iff$

$$\cancel{|\bar{x}|^2} + \cancel{|\bar{y}|^2} + 2(\bar{x},\bar{y}) \le \cancel{|\bar{x}|^2} + \cancel{|\bar{y}|^2} + 2|\bar{x}|\cdot|\bar{y}| \iff$$

$\iff (\bar{x},\bar{y}) \le |\bar{x}|\cdot|\bar{y}|$ а это следует из нер-ва К-Б-Ш

Тогда $\underbrace{|\bar{x}-\bar{z}|}_{\bar{a}+\bar{b}} \le \underbrace{|\bar{x}-\bar{y}|}_{\bar{a}} + \underbrace{|\bar{y}-\bar{z}|}_{\bar{b}}$

Примеры евклидовых пространств.

1) $X = \{(x_1 \ldots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$\bar{x}+\bar{y}$ и $\alpha\bar{x}$ опр-ся как в $\mathbb{R}^n$ а скалярное произведение

$$(x,y) = x_1 \cdot y_1 + 2x_2y_2 + \ldots + n x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i y_i$$

да, является евклидовым пр-ом

2) $X = \{(x_1 \ldots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$\bar{x}+\bar{y}$ и $\alpha\bar{x}$ опр-ся как в $\mathbb{R}^n$ а скалярное произведение

$$(\bar{x},\bar{y}) = -x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

нет, не является евклидовым пространством

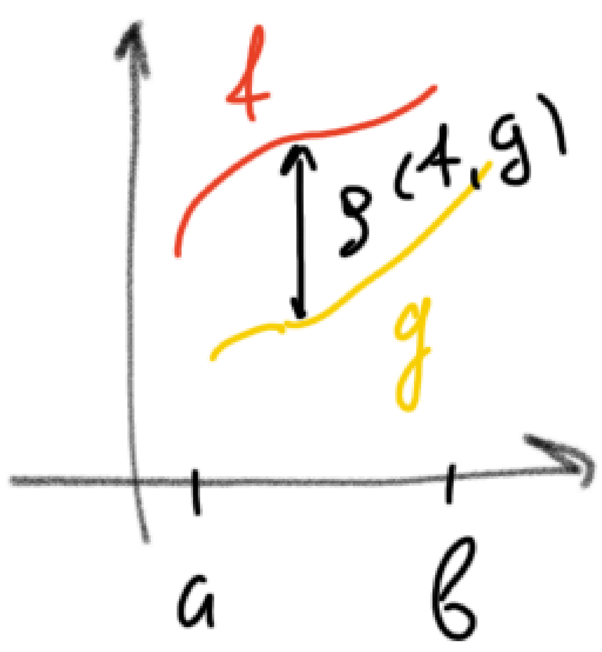
контр пример $(\bar{x},\bar{x}) = -1 < 0$

3) $X = C[a,b]$ $\qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$x \in [a,b]$ $\qquad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

$C[a,b]$ - векторное пр-во (бесконечномерное)

По умолчанию $C[a,b]$ понимается с равномерной метрикой метрикой



$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

Но $C[a,b]$ не евклидово пр-во

Чтобы ввести скалярное произв. на множестве непр ф-ций на $[a,b]$, рассм

$$(f,g) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

Проверить аксиомы скалярного произв. самостоятельно 1), 2), 3)

4) $(f,f) = \int_a^b (f(x))^2\,dx \geq 0$, причем $\int_a^b f^2(x)\,d = 0 \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ для непр. f $\quad f(x) \equiv 0$

В евклидовом пространстве можно определить угол между ненулевыми векторами

$$\cos(\hat{\bar{x}\,\bar{y}}) \stackrel{def}{=} \frac{(\bar{x},\bar{y})}{|\bar{x}||\bar{y}|}$$

$$\bar{x} \perp \bar{y} \stackrel{def}{\iff} (\bar{x},\bar{y}) = 0$$

§2. Метрические пространства

(X, ρ) – метр. пр-во, если на X задана метрика, то есть

$\rho: X \cdot X \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ т.ч.
$$\begin{cases} 1)\ \rho(x,y) \geq 0, \text{ причем } \rho(x,y)=0 \iff x=y \\ 2)\ \rho(x,y) = \rho(y,x) \\ 3)\ \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \end{cases}$$

Примеры

1) $X = \mathbb{R}^n$, $\rho(\bar{x},\bar{y}) = |\bar{x}-\bar{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

2) $X = C[a,b]$ $\quad \rho(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

3) $X = L_2[a,b]$ $\quad \rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$