4) $X = \{ (x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R} \}$

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

Опр-ие шара в (X,ρ)

$$B_\varepsilon(x_0) = \{ x \in X \mid \rho(x_0, x) < \varepsilon \}$$

Проиллюстрировать шар в разных случаях

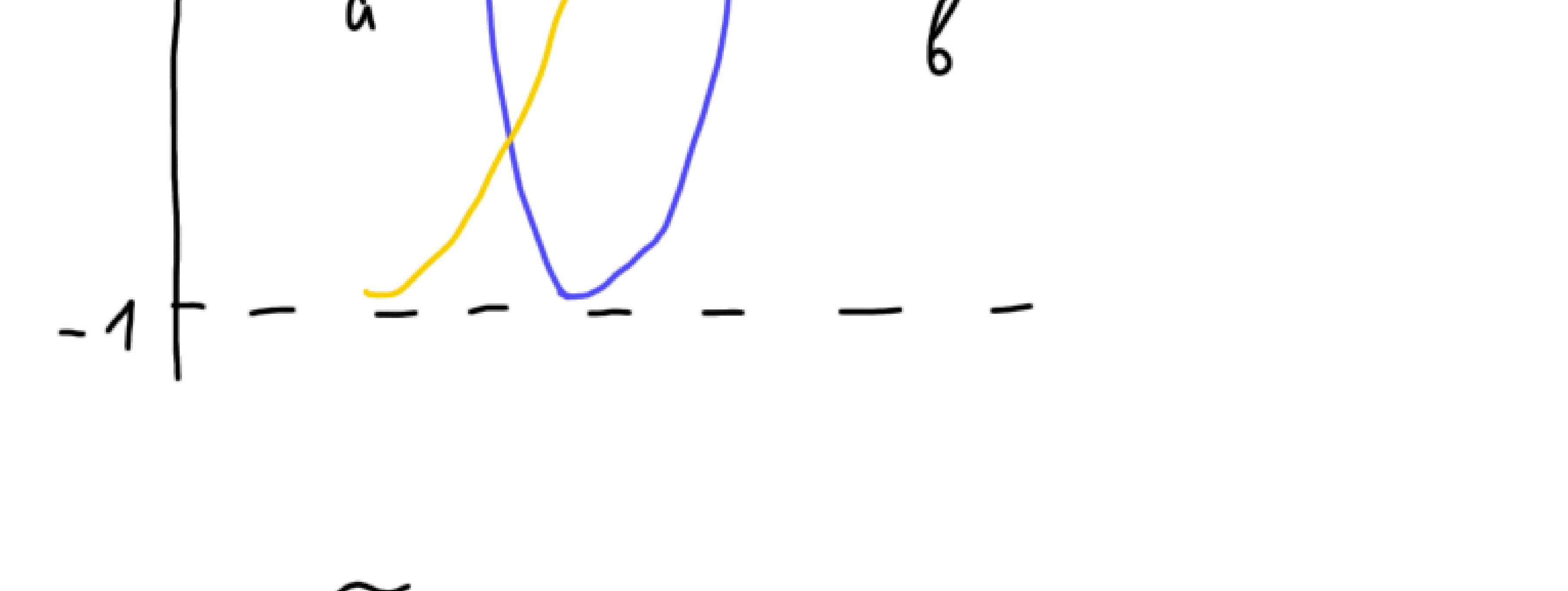
Лекция 6

P.S. вопрос уравнение шара в 4 мерном пр-ве

Пример 2 $C[a,b]$

$$B_1(0) = \left\{ f \in C[a,b] \;\middle|\; |f(x)| < 1 \;\; \forall x \in [a,b] \right\}$$

Представление об этом шаре дает след. рис.

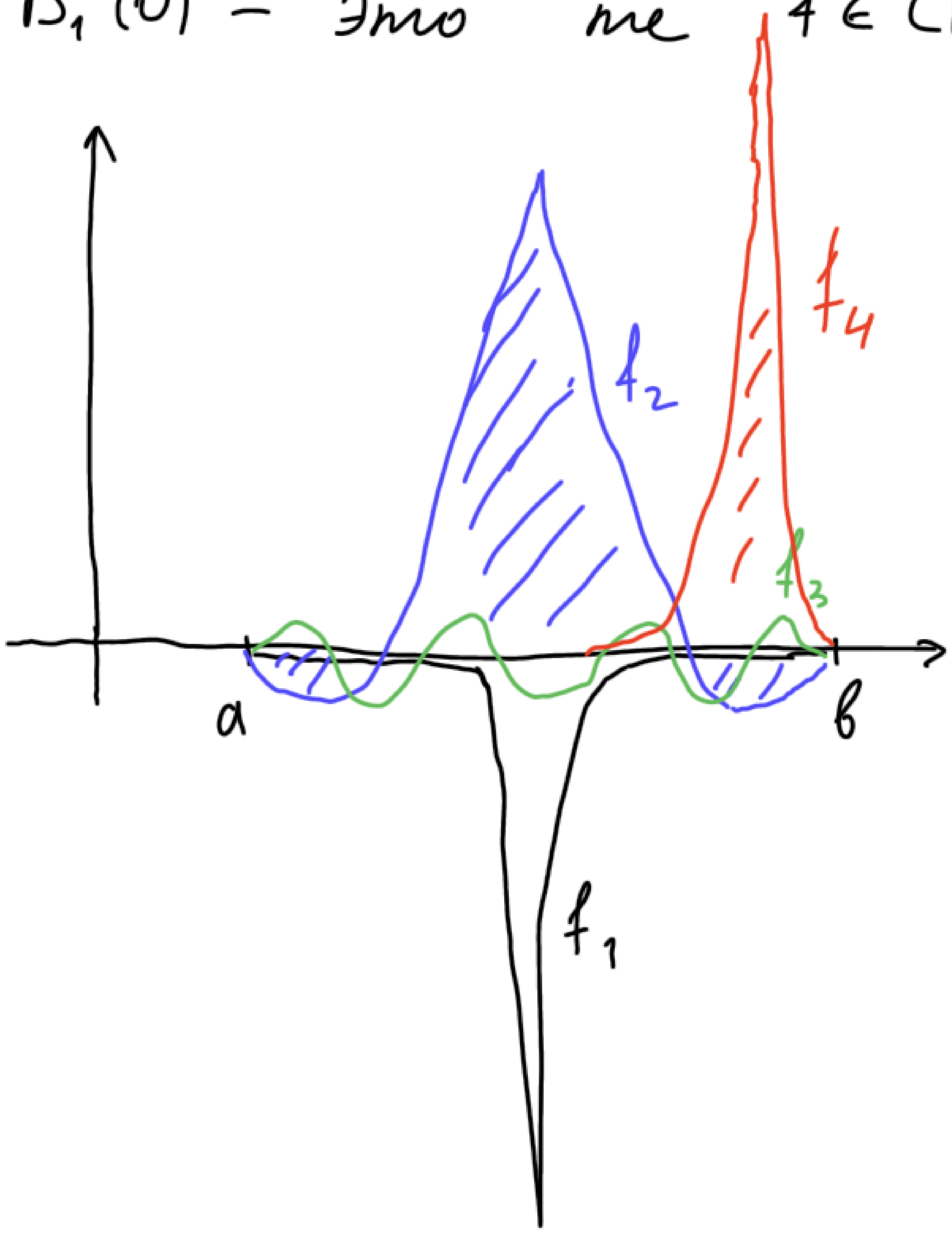


Пример 3

X - мн-во непр ф-ий $f \in L_2[a,b]$

$$\left(\int_a^b f^2(x)\,dx < \infty \right)$$

$B_1(0)$ – это те $f \in C[a,b]$, для ком. $\int_a^b f^2(x)\,dx < 1$

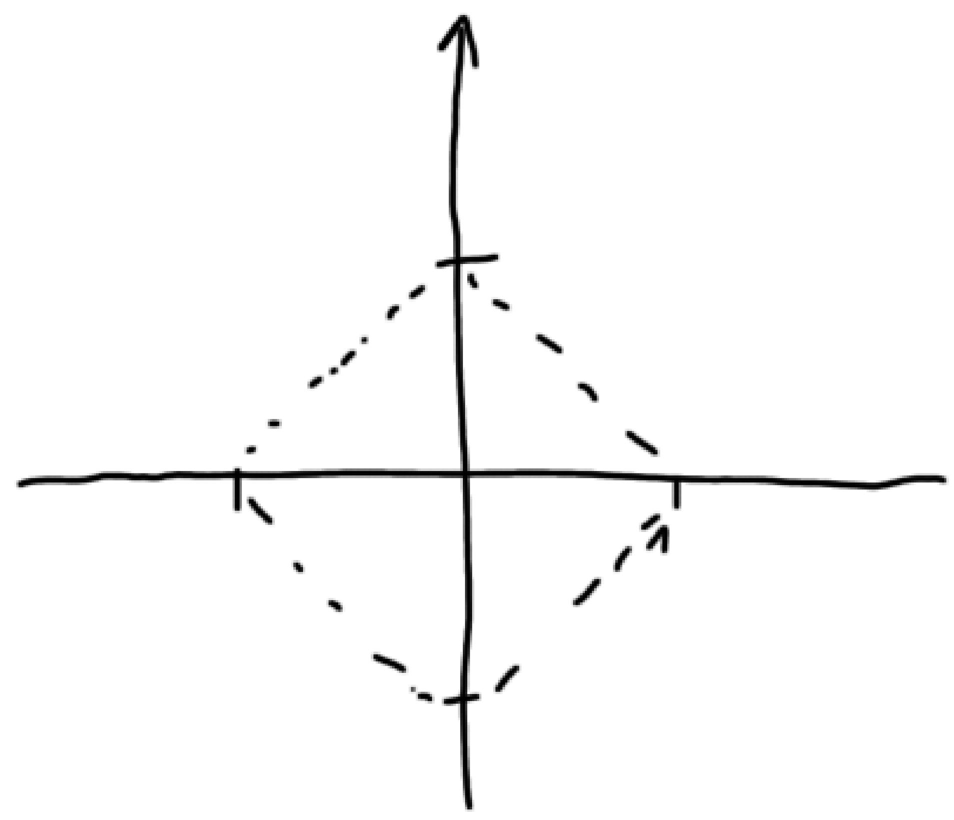


Пример 4

$$X = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$B(0) = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 1\}$$



<u>Опр-е</u> Послед-ть x_n сходится к $x^* \in X$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ т.ч. $\forall n \geqslant N_0$

$$\underbrace{\rho(x_n, x^*) < \varepsilon}_{\Leftrightarrow\; x_n \in B_\varepsilon(x^*)}$$

Обознач. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x^*$

или

$x_n \to x^*$

Для примера рассмотрим сходимость послед-ти векторов $\overline{x}_m \in \mathbb{R}^n$ $(m \to \infty)$

$$\overline{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^n$$

Теорема 1 Сходимость в $\mathbb{R}^n$ покоординатная:

$$\lim_{m\to\infty} \overline{x}_m = \overline{x}^* \iff \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \lim_{m\to\infty} x_{m_i} = x_i^*$$

Док-во

$\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{x}_m = \overline{x}^* \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \text{т.ч.} \ \forall m \geq N_0 \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{m_i} - x_i^*)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\text{фикс}}{\forall i} \quad |x_{m_i} - x_i^*| < \varepsilon \quad (\forall m \geq N_0)$$

$\Leftarrow$ Пусть $\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \lim\limits_{m\to\infty} x_{m_i} = x_i^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{m_i} - x_i^*)^2} = 0$$

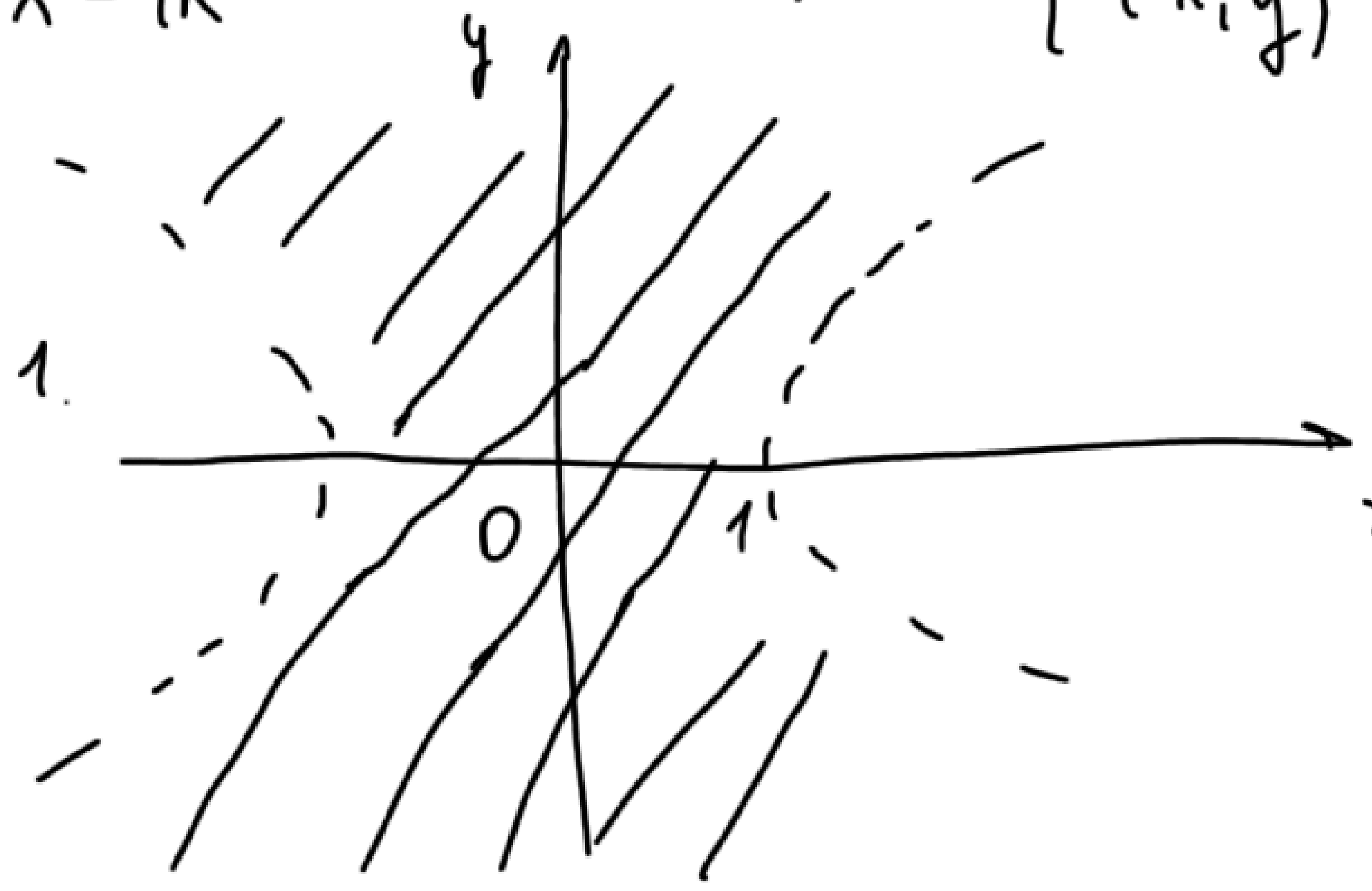
Опр. 1) Мн-во $M \subset X$ в метр. пр-ве (X, ρ) наз-ся открытым, если $\forall x_0 \in M \ \exists \varepsilon > 0$ т.ч. $B_\varepsilon(x_0) \subset M$

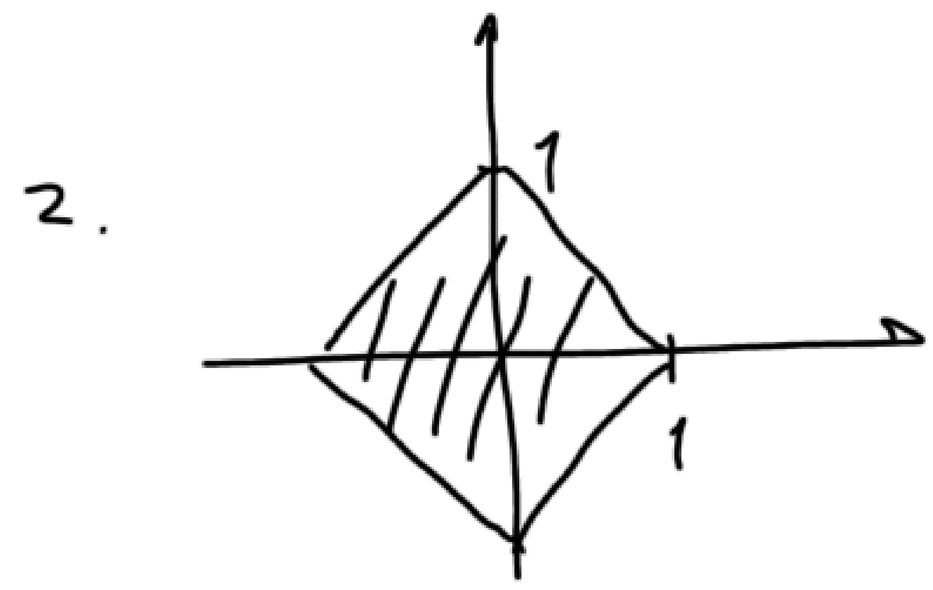
2) Мн-во M наз-ся замкнутым, если его дополнение $X \setminus M$ открыто

Примеры

1. $X = \mathbb{R}^2$ $\quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1\}$

2. $X = \mathbb{R}^2$ $\quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$





3) Точка $x_0 \in M$ наз-ся внутренней точкой мн-ва M, если $\exists B_\varepsilon(x_0) \subset M$

4) Точка $x_0 \in X$ наз-ся граничной точкой мн-ва M, если $\forall \varepsilon > 0$ в $B_\varepsilon(x_0)$ есть точки из M, а также точки из $X \setminus M$

Обозначения

$\mathring{M}$ или $\mathrm{int}(M)$ обозначают мн-во внутр. точек

∂M - граница M (мн-во граничных точек)

5) Точка $x_0 \in X$ наз-ся предельной точкой мн-ва M, если $\forall B_\varepsilon(x_0)$ содержит точки из M, отличные от x_0 $\Leftrightarrow$

$\exists$ послед-ть $x_n \in M \setminus \{x_0\}$ т.ч. $\lim x_n = x_0$

Обозн M'

Лекция 7

6) Замыкание данного мн-ва $M \subset X$

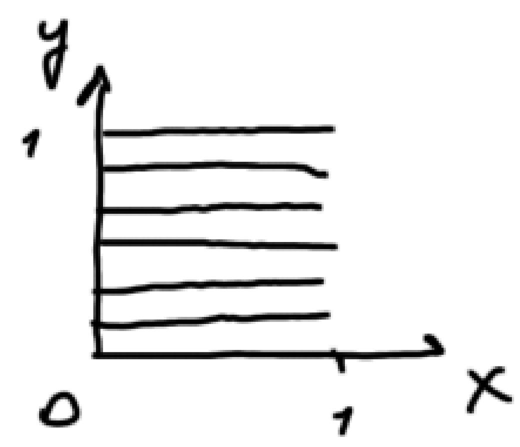
$cl(M) = M \cup \partial M$ ("$clos$" $M = \bar{M}$)

Утв (упражнение 1) $cl\, M = M \cup M'$, где M' - множ. предельных точек мн-ва M

Теорема 2 (упражнение 2). Мн-во $M \subset X$ явл-ся замкнутым $\Leftrightarrow cl\, M = M$

Упражнение 3 $cl\, B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) \le \varepsilon\} =$ обозн $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$

Примеры 1. $X = \mathbb{R}^2$



1) $M = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$

Вопросы: является ли M а) открытым мн-вом

б) замкнутым мн-вом

в) ограниченным мн-вом

г) 1) $\partial M = ?$?
2) $M' = ?$

д) $cl\, M$

е) $int\, M$

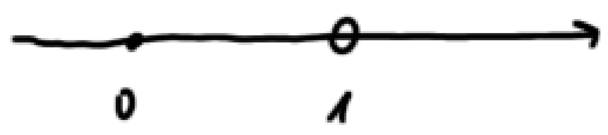
Отв.
а) нет
б) нет
в) да
г) 1), 2) $[0,1] \times [0,1]$
д) $[0,1] \times [0,1]$
е) $\varnothing$

7) Мн-во X наз-ся ограниченным, если $\forall x_0 \in X$ $\exists R > 0$ т.ч.

$M \subset B_R(x_0)$ $\Leftrightarrow$ если $\exists x_1 \in X$ $\exists R > 0$

т.ч. $M \subset B_R(x_1)$

Пример 2. а) $X = \mathbb{R}$ $\quad M = [0,1)$



1) M - открыто? нет (см. точку 0)

2) M - замкнуто? нет (см. п. 1)

$\partial M = \{0; 1\}$ $\quad M' = [0,1]$

$\mathrm{cl}\, M = [0,1]$

б) Пусть $X = [0, +\infty) = \mathbb{R}^+$

$M = [0,1)$

1) M - открыто

2) M - незамкнуто

$\partial M = \{1\}$ $\quad M' = [0,1]$ $\quad \mathrm{cl}\, M = [0,1]$

Св-ва предела послед-ти: (Теоремы)

а) единственность предела

б) необходимое условие сходимости - ограниченность

Справедливы в $\forall$ метр. пр-ве

Опр (компактного мн-ва)

Пусть (X, ρ) - метр. пр-во. Мн-во $M \subset X$ наз-ся компактным, если $\forall x_n \in M$ найдется сходящаяся подпослед-ть x_{n_k} т.ч. $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \in M$

Пример 1) $X = \mathbb{R}$ $\quad M = [a, b]$ - компакт, т.к. по Теор Больцано - Вейерштрасса $\forall x_n \in [a, b]$ $\exists$ сход. подпослед. $x_{n_k} \to x^* \in \mathbb{R}$, при этом $x^* \in [a, b]$ т.к $a \le x_{n_k} \le b$ $\forall k$ и по св-ву нер-в $a \le \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \le b$

2) $X = \mathbb{R}$ $\quad M = \mathbb{N}$ -

- не компакт: контрпример $x_n = n$

$\forall x_{n_k} = n_k \to +\infty$ не имеет предела

3) $X = \mathbb{R}$ $\quad M = [0, 1)$ не компакт

контрпример $x_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \notin M$

Теорема 3 (Необходимое условие компактности)

Если $M \subset X$ компактно, то M ограничено и замкнуто.

1. От противного, пусть M - неогр.

$$\forall a \in X \quad \forall R > 0 \quad \exists x \in M : \rho(a, x) > R$$

фиксируем $a_0 \in M$. Тогда для $R = n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in M$: $\rho(a_0, x_n) > n$

получим послед $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$

по опр компактности

$$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}, \exists c \in M : x_{n_k} \to c$$

сходящ. послед (в метр простр) огранич.

$$\exists R_0 > 0 \quad \forall k \quad \rho(c, x_{n_k}) \le R_0$$

но по построению

$$\rho(a_0, x_{n_k}) > n_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

противоречие

(из сходимости $x_{n_k} \to c$ и нер. треуг $\rho(a_0, x_{n_k}) \le \rho(a_0, c) + \rho(c, x_{n_k})$ следует ограниченность $\rho(a_0, x_{n_k})$).

значит M огранич.

Замкнутость:

От противного $X \setminus M$ не открыто,

$\exists x \in X \setminus M : \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$

возьмем послед $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Тогда

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap M$

Получили послед $\{x_n\} \subset$, причем $x_n \to x$

Т.к. M-компакт, то $\exists a \in M : x_{n_k} \to a$

Но x_{n_k} - подпослед сход к x послед $\Rightarrow$

$x_{n_k} = x$

т.к. в метрич. простр сущ. не более одного предела $\Rightarrow \quad x = a \in M$

противоречие

значит $X \setminus M$ открыто $\Rightarrow M$ замкнуто

замк. от против. (эквив. усл. замк)

$\exists$ предельная (для M)

т. $x_0 \in M \Rightarrow \exists$ послед x_n

...