Теорема 4 (Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$)

Мн-во $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда M ограничено и замкнуто

Док-во

а) необходимость = теор 3

б) достаточность пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ огранич и замкнут. Возьмем произв послед-ть $(m \to \infty)$

$\bar{x}_m (x_{m_1}, x_{m_2}, \dots x_{m_n}) \in M$

Рассм. послед-ть первых координат $x_{m_1} \in \mathbb{R}$. Это огр. послед-ть. т.к.

$|x_{m_1}| \leq |\bar{x}_m| < C$ для нек $C > 0$

$\Rightarrow$ по теор. Больцано-Вейерштрасса из $\{x_{m_1}\}$ можно выделить сход. подпослед-ть $x_{m_{1_k}} \to x_1^*$ (при $k \to \infty$)

Далее рассм. послед-ть $x_{m_k^2}$ (для найденх номеров m_k выше) и аналогично, находим подпослед-ть $x_{m_{k_e}^2} \to x_2^*$ и т.д. после n таких процедур находим под-под-… послед-ть x_{m_j}, где $j = m_{k_e \dots p}$

$\forall i = \overline{1,n} \qquad x_{m_j, i} \to x_*^i$, при $j \to \infty$

В результате $\bar{x}_{m_j} \to \bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*) \in \mathbb{R}^n$

Поскольку M замкнуто $\Rightarrow$ $\bar{x}^* \in M$

Замечание: (функциональный анализ) в беск. мерных пр-вах достаточность не работает

Теорема* Необходимое условие компактности. Мн-во M явл-ся компактным $\Leftrightarrow$ из любого открытого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие

Здесь термины:

покрытие данного мн-ва M - это набор таких множеств U_i, что $\bigcup_i U_i \supset M$

Открытое покрытие - это покрытие открытыми U_i

Непрерывность ф-ии на метрич пр-вах

Пусть (X, ρ) и $(Y, \tilde{\rho})$ - два метрич пр-ва и пусть $f: X \to Y$ отображ (ф-ия)

Пусть $x_0 \in X$ $y_0 = f(x_0) \in Y$

Опр (непрерывности в т. x_0)

Ф-ия $y = f(x)$ наз-ся непр. в т. x_0, если

на языке ε-δ

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \ (f(x) \in B_\varepsilon(x_0)) \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{\rho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

на язык послед.

$$\forall x_n : (\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0))$$

Опр

Определение 15. Функция $f: X \to Y$ - *непрерывна*, если f непрерывна в каждой точке X.

Теорема 22. *$f: X \to Y$ - непрерывна тогда и только тогда, когда для любого открытого $V \subset Y$ множество $f^{-1}(V)$ открыто в X.*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X |\ f(x) \in V\} \tag{10.1}$$

Доказательство.

$\Leftarrow$ Пусть $a \in X$, возьмем $\varepsilon > 0$ $V = B(f(a), \varepsilon)$, по условию $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ - открыто, оно содержит точку a из-за открытости $\exists B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, то есть $\rho_X(a, x) < \delta$ следует

$$\rho_y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ доказать самостоятельно.

□

$\Rightarrow$ Пусть $f: X \to Y$ непр (на X) и

$U \subset Y$ откр

Упр.

1 Замкнутое подмножество компакта - компакт

2. Пересечение компактов, есть компакт

Теорема 5

$f: X \to Y$ непр $\Leftrightarrow$ $\forall$ откр $U \subset Y$ прообраз $f^{-1}(U)$ откр в X

Δ

1) необх (непр $\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$ откр $\forall$ откр в U)

2) пусть $\forall$ откр $U \subset Y$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(U) \subset X$ откр

Тр-ся по опр-ю $\forall x_0 \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ т.ч.

$\forall x \in X$ $(x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(y_0))$, где $y_0 = f(x_0)$

Возьмем $U = B_\varepsilon(y_0)$ – это откр $\Rightarrow$

и пусть $V = f^{-1}(U)$ $\Rightarrow$ V откр по условию Теоремы и

содержит $x_0 \in f^{-1}(y_0)$

$\exists B_\delta(x_0) \subset V = f^{-1}(U) = f(B_\delta(x_0)) \subset U$ $\square$

Рассм пример

$f(x) = 2x$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Вопрос: явл-ся ли $f(x)$ непр на $[0,1]$, т.е $\overline{f:[0,1] \to \mathbb{R}}$

Возьмем $U = (0,4)$

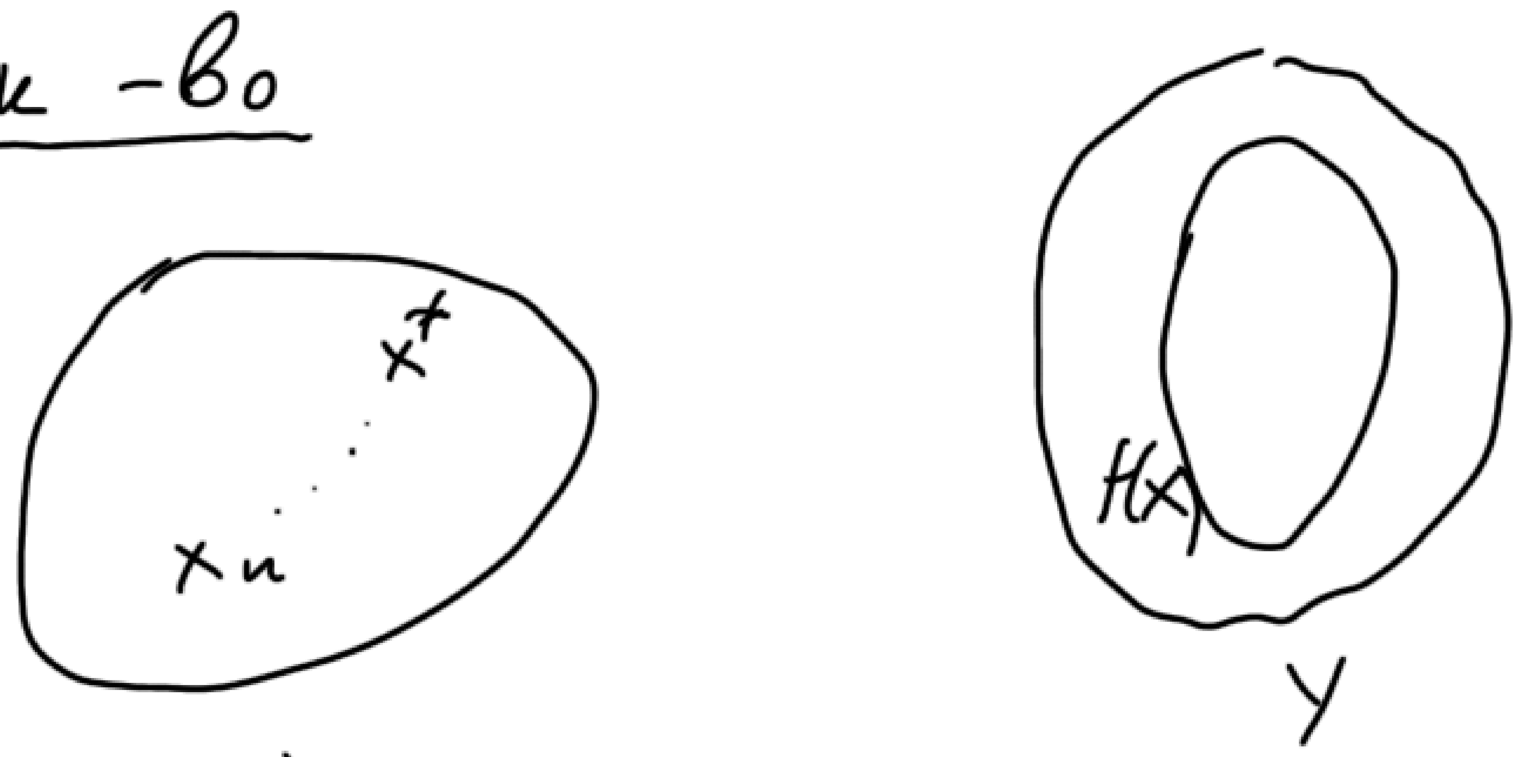
$f^{-1}(U) = (0,1]$

P.S. 1 внутр точка для обл. опр $[0,1]$

Теорема 6 (Аналог 1-й и 2-й Теор. Вейерштр)

Образ компакта при непрерывном отображении – компакт, т.е. если $f: X \to Y$ непрерывное отображение и X компактное пр-во, то $f(X)$ – тоже компакт

Док-во



X - комп.

Пусть $y_n = f(x_n)$ — послед-ть из $f(X) \overset{т.к.}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \exists$ подпослед-ть $x_n \to x^* \in X$ при $n \to \infty$ $\overset{непр\ f}{\Rightarrow} y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{при} f(x^*) \in f(X)$

□

Теорема 6' (= Теор 6 для комп подмножества)

Если $M \subset X$ — комп и $f: X \to Y$ непр $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(M) \subset Y$ — компакт

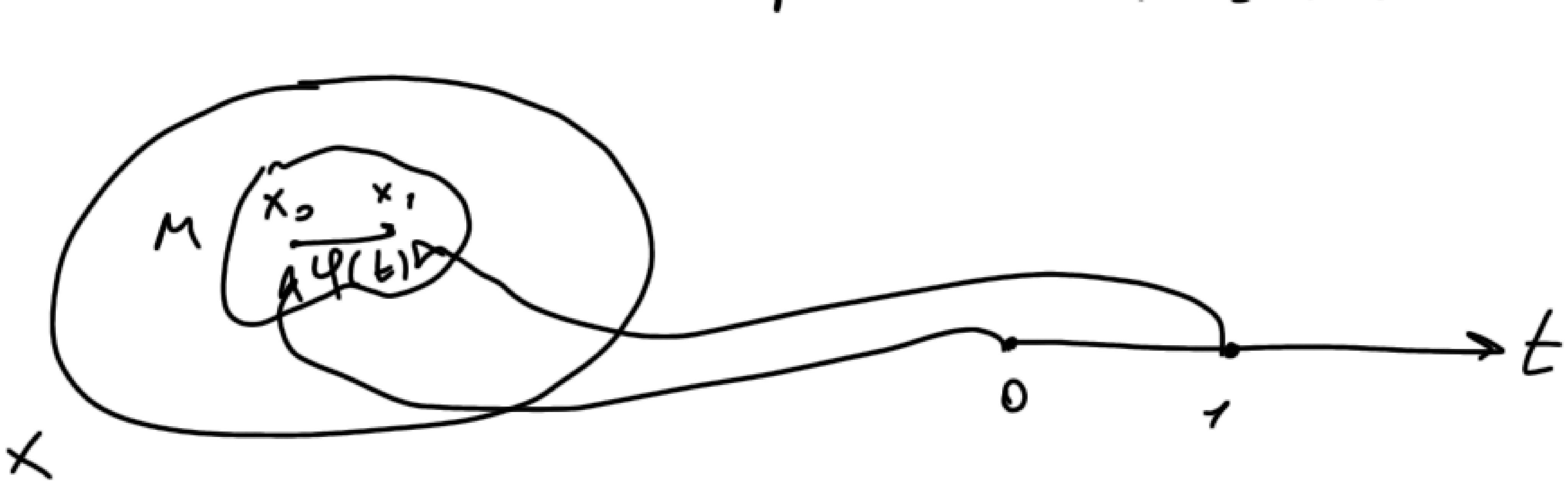
Следствие: для $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

1-я, 2-я теор Вейерштр (или обобщ $f: [a,b] \to Y$ — метр. пр-во)

Для теорем Больцано-Коши нужно опр связности

Опр (связности)

Мн-во $M \subset X$ в метр. пр-ве (X, ρ) называется линейно связным в M, если $\forall x_0, x_1 \in M$ существует кривая в M, соединяющая x_0, x_1, т.е. $\exists$ непр. ф-ия $\varphi: [0,1] \to M$ т.ч. $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$

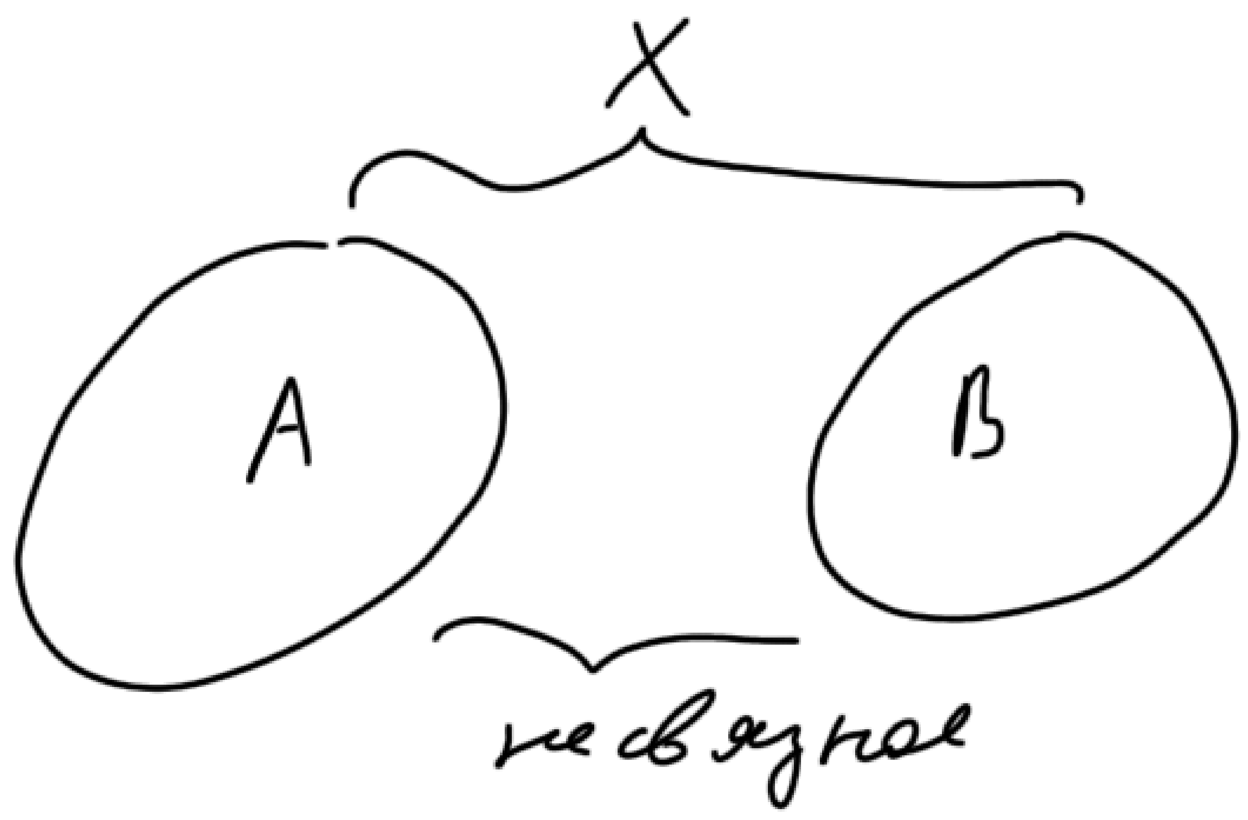


Опр (связности метр пр-ва)

Метрич пр-во (X, ρ) наз-ся связным, если X нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся, непустых открытых множеств

в отличии от несвязного пр-ва, для которого $\exists$ открытые $A, B \neq 0$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{т.ч.} \quad X = A \cup B$$



посмотреть дома:

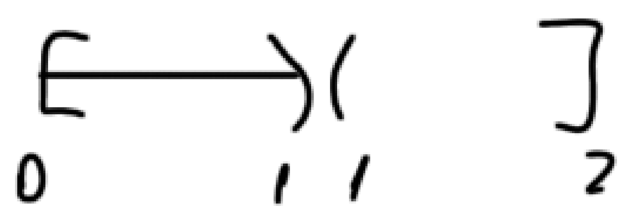
если мн-во линейно связно $\Rightarrow$ оно связно

композиция непр отобр — непр

Примеры

1) $X = (-2, 0) \cup (5, 7] \cup [10, +\infty)$ несвязн

2) $X = [0, 1] \cup (1, 2]$



несвязно

3) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1\}$ связно

4) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$ — несвязно

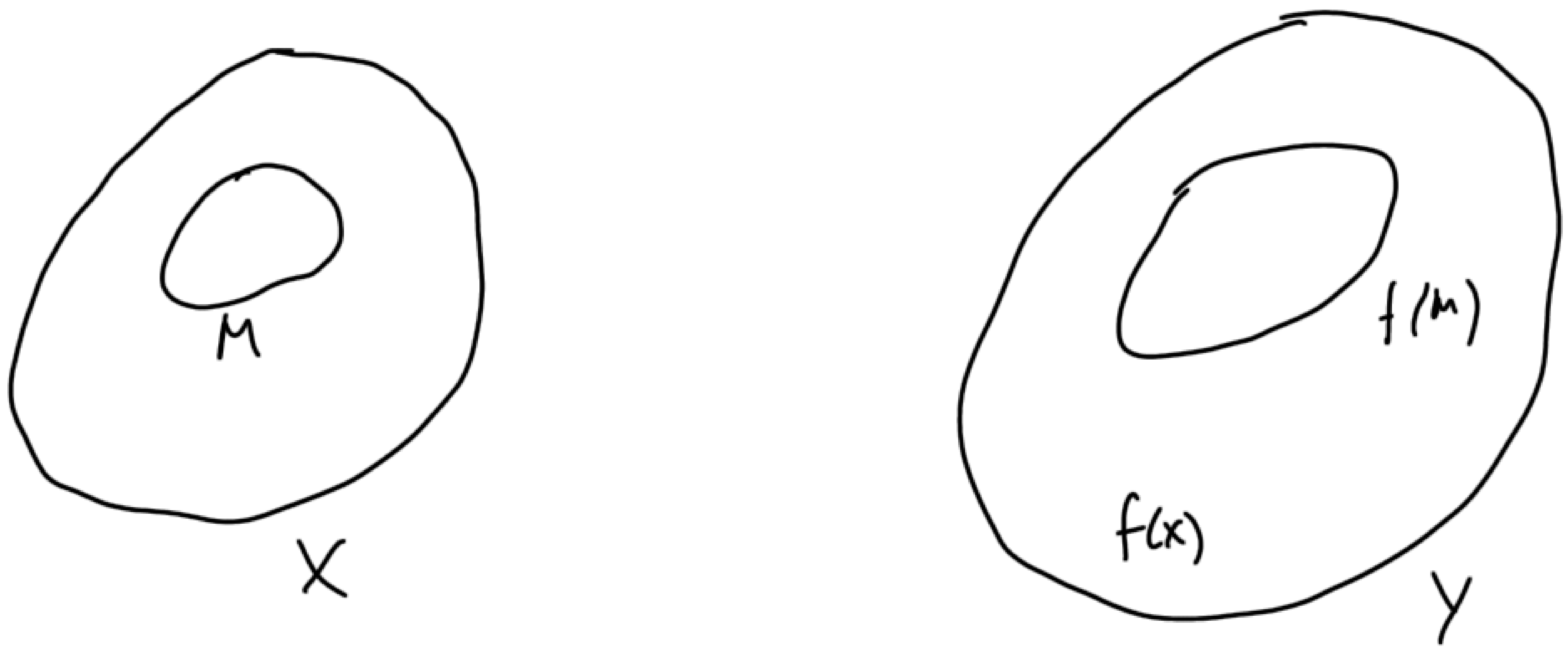
Теор 7 Пусть $f: X \to Y$ непр отображение метр пр-ва (X, ρ) в (Y, ρ')

1) Если M связно, то $f(M)$ тоже связно

2) Если M линейно связно, то $f(M)$ тоже лин связно

Док-во

2)



$f = \varphi(1) = f(x_1) = y_1$

Пусть $y_0 = f(x_0)$ $y_1 = f(x_1)$ — произв. точки из $f(M)$

$x_0, X_1 \in M \underset{\text{лМ}}{\overset{\text{лин. св.}}{\Rightarrow}} \exists \underset{\text{непр}}{\varphi} : [0,1] \to M$ т.ч. $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = X$

$\Rightarrow$ композиция $f \circ \varphi : [0,1] \to f(M)$ и

$f \circ \varphi(0) = f(x_0) = y_0$

13.03.26

Замечание. Компонентой связности точки $x_0 \in X$ в метр пр-ве (X, ρ) наз-ся наибольшее (по включению) связное мн-во в X, содержащее x_0

Пример: $X = (-1, 0] \cup [2, 3]$ (с обычной метрикой $|x-y|$)

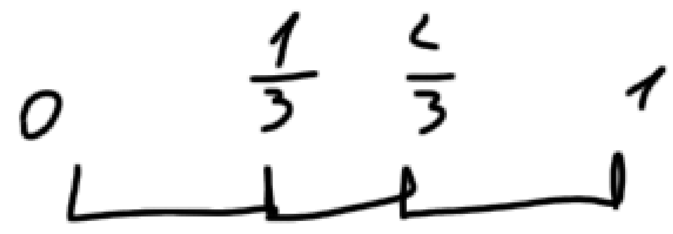
$\Rightarrow$ компонентой связности точки $\{-\frac{1}{2}\} = (-1, 0]$

компонентой связности точки $\{3\} = [2, 3]$

Мн-во наз-ся вполне несвязным, если комп-та св-ти точки есть она сама

Пр $X = \{0\}$

Канторовское мн-во



Замкнут, нигде не плотное, вполне несвязное совершенное (не содерж. изолир точек)

<u>Опр</u>

1) мн-во $M \subset X$ наз-ся всюду плотным (в X) если его замыкание совпадает с X ($\text{cl}(M) = X$)

Пример $M = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \; (=X)$

2) мн-во $M \subset X$ наз-ся нигде не плотным, если внутренность M пуста: $\text{int}(M) = \varnothing$

Обобщение теоремы Кантора

Напомним опр-е равномерной непр-ти

$f: X \to Y$ для метр. пр-в (X, ρ) и (Y, ρ')

наз-ся равном. непр., если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall x, x' \in X$

$(\rho(x, x') < \delta \Rightarrow \rho'(f(x), f(x')) < \varepsilon)$

Теорема 8 Функция непрерывная на компакте является равномерно непрерывной, т.е если f: X->Y непр. то f равн. непр

Док-во: от противного к опр (равн. непр)

$\exists \varepsilon_0 > 0$ т.ч. $\forall \delta > 0$ $\exists x, x' \in X$ т.ч. $\begin{cases} \rho(x, x') < \delta \\ \rho'(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon_0 \end{cases}$

Возьмем $\delta = \frac{1}{n}$ (для данного ε_0) и получим

две послед-ти $x_n, x_n' \in X$ т.ч. $\begin{cases} \rho(x_n, x_n') < \frac{1}{n} \\ \rho'(f(x_n), f(x_n')) \geqslant \varepsilon_0 \end{cases}$

В силу компактности X

$\exists x_{n_k} \to x^* \in X$ при $k \to \infty$

Тогда $x'_{n_k} \to x^*$ (при $k \to \infty$), т.к

$$\rho(x'_{n_k}, x^*) \leqslant \underbrace{\rho(x'_{n_k}, x_{n_k})}_{\leqslant \frac{1}{n_k} \to 0 \text{ при } k\to\infty} + \underbrace{\rho(x_{n_k}, x^*)}_{\to 0, \text{ при } k \to \infty} \to 0$$

Теперь из непр-ти f в т. x^* следует

$\rho'(f(x_{n_k}), f(x^*)) \to 0$ и $\rho'(f(x'_{n_k}), f(x^*)) \to 0$

$\Rightarrow \rho'(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \leqslant \quad \ldots$

в то время как $\ldots \quad > 0$

Определение 6. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем выполняется критерий Коши, то есть x_n - сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N: \, \forall n, \, m > N$

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Последовательности, для которых выполнено это условие, называются *фундаментальными* или *последовательностями Коши.*

Упр

Теорема 4. $\mathbb{R}^n$ - *полное метрическое пространство.*

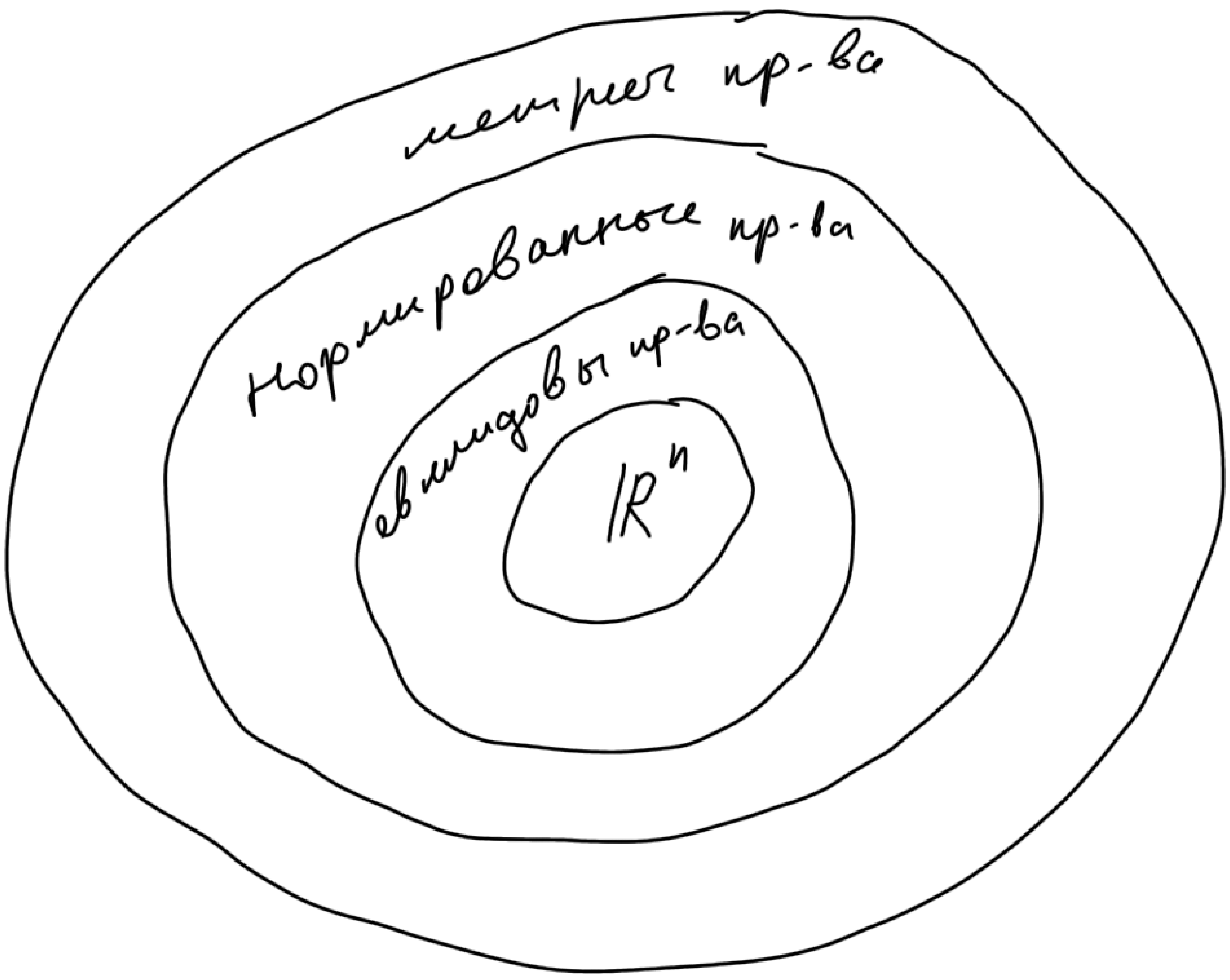
Доказательство. x^m - фундаментальная последовательность.

$$|x_k^m - x_k^l| \leqslant \rho(x^m, x^l)$$

следовательно $\forall k = 1, ...n$ x_k^m - фундаментальная, значит $x_k^m \to a_k$ $\square$

Упр Если X компакт $\Rightarrow$ X — полное метр пр-во

Иерархия метрич. пространств



18.03.26

Опр. (нормир. пр-ва)

Линейное пр-во E наз-ся нормированным, если на E введена <u>норма</u>, т.е $\underset{\in E}{x} \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая аксиомам:

① $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

② $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

③ $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(① $\forall x \in E$ ② $\forall x, y \in E$ ③ $\forall x \in E$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$)

Примеры

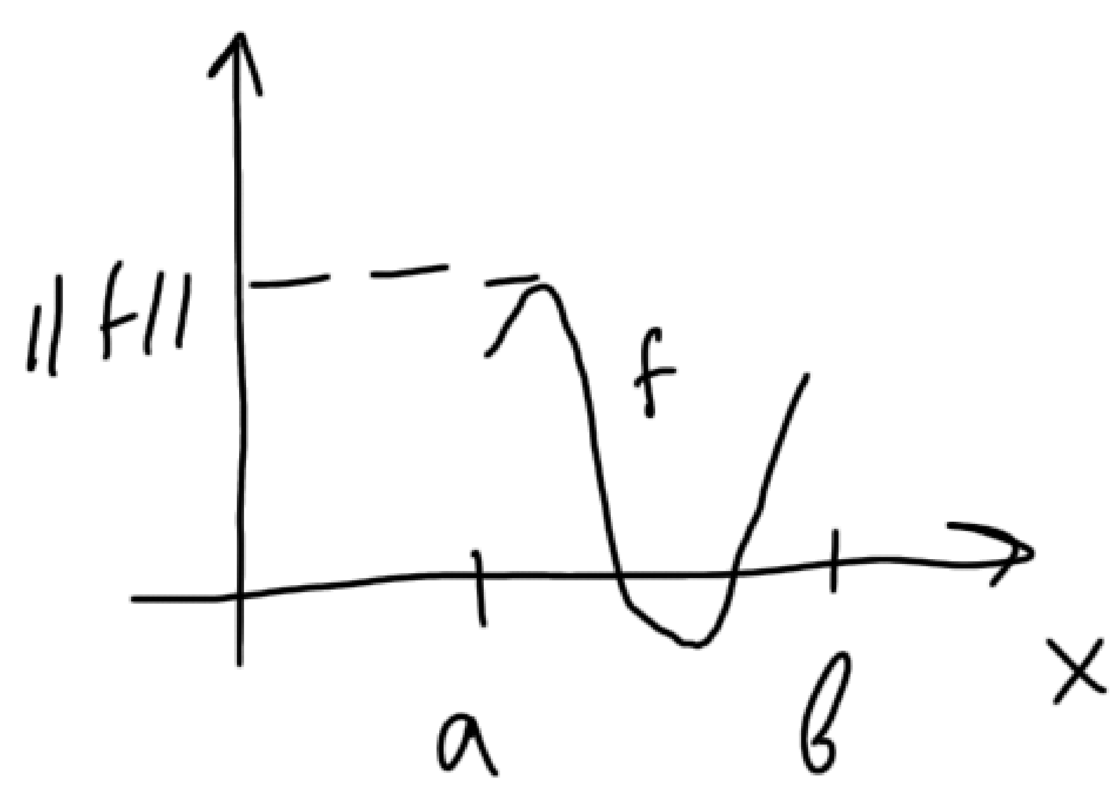
1) $E = \mathbb{R}^n$, $\|\vec{x}\| = |\vec{x}|$ модуль вектора

2) E - евкл. пр-во

$\|x\| = |x| = \sqrt{(x, x)}$

3) $E = C[a,b]$ $\forall f \in C[a,b]$

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$



$\Downarrow$

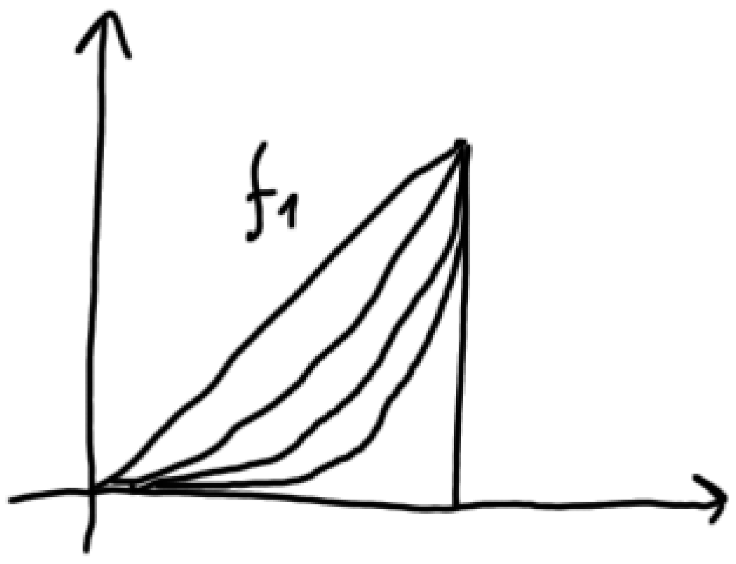
$$(\rho(f,g) = \|f-g\| = \max |f(x) - g(x)|)$$

и в общем случае, нормир. пр-во явл-ся метрическим с расстоянием $\rho(x,y) = \|x-y\|$

Отметим, что $C[a,b]$ не явл-ся ни евклидовым, ни полным метрич. пр-вом

Контрпример

На $C[0,1]$ рассм. послед-ть $f_n(x) = x^n$



В метрике $L_2[0,1]$

$$\rho_{L_2}(f_n, f_m) = \sqrt{\int_0^1 \left(f_n^{(x)} - f_m^{(x)}\right)^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (x^n - x^m)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (x^{2n} - 2x^{n+m} + x^{2m})\, dx} =$$

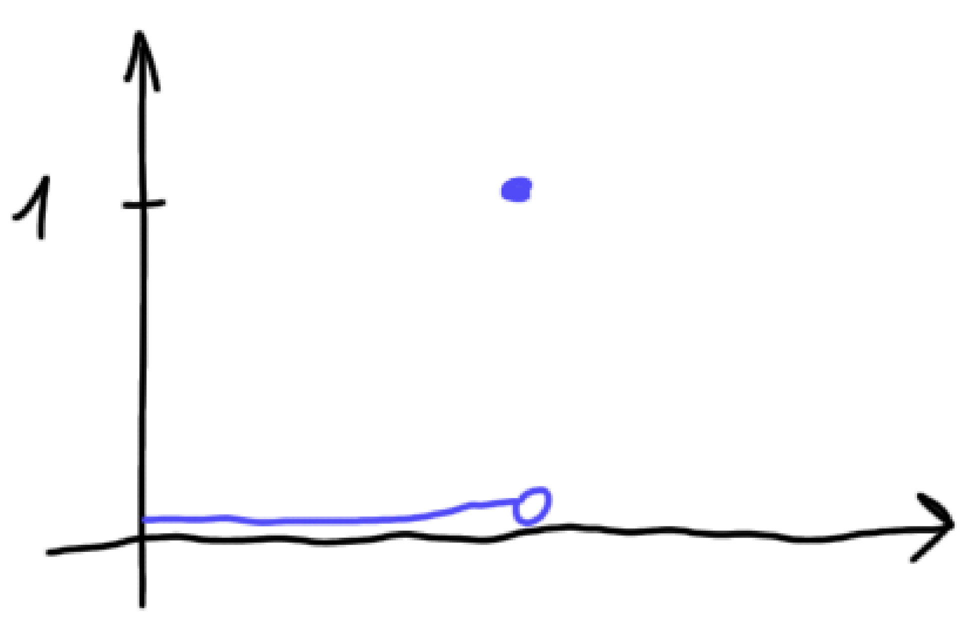
$$= \sqrt{\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 2\frac{x^{n+m-1}}{n+m-1} + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \right)\Bigg|_0^1} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{n+m-1}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{2m+1}}_{\to 0}}$$

при $n, m \geqslant N_0 \quad N_0 \to \infty$

Но $\forall x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



Линейные операторы на нормир. пространствах

Пусть $A: E_1 \to E_2$ - линейный оператор в норм. пр-вах $(E_1, \|\cdot\|_1)$ и $(E_2, \|\cdot\|_2)$

Опр. (операторной нормы)

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \overset{(*)}{=} \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2$$

Упр: почему (*) выполняется

Действительно

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \overset{\text{акс } 3)}{=} \left\|\frac{1}{\|x\|_1}Ax\right\|_2 \overset{\text{св-во лин}}{=} \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2$$

Но $\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 \overset{3)}{=} \frac{1}{\|x\|_1}\|x\|_1 = 1$

<u>Теорема</u> (без док-ва)

В конечномер евклид пр-ве все нормы эквивалентны

Примеры

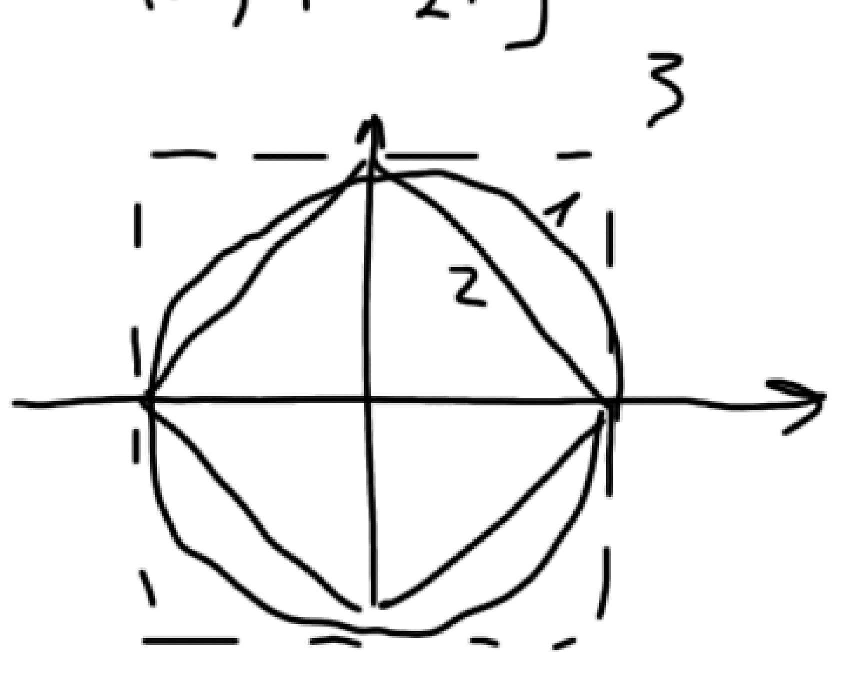
1) $\mathbb{R}^n$ евклидова норма $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$

другая норма $\|\vec{x}\|_1 = |x_1|+|x_2|$

третья норма $\|x\|_2 = \max\{|x_1|,|x_2|\}$

единичные шары $B_1(0)$

шары для этих норм



Для нормы лин оператора $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\|A\|$ – конечное число

т.к. $S_1 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| = 1 \}$ – компакт, а

$|A\vec{x}| : S_1 \to \mathbb{R}^+$ непр ф-ия $\vec{x} \to |A\vec{x}|$

Полезное нер-во для линейных операторов в норм пр-вах

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 \quad \forall x \in E_1$$

Следует из опр-я $\|A\|$

§3 Пределы и непр-ть в R^n

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Напомним: сходимость в $\mathbb{R}^n$ покоординатная $\Rightarrow$ Арифметические св-ва предела:

1) $\lim\limits_{m\to\infty} (\vec{x}_m + \vec{y}_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \vec{x}_m + \lim\limits_{m\to\infty} \vec{y}_m$

2) $\lim\limits_{m\to\infty} (\alpha \bar{x}_m) = \alpha \cdot \lim\limits_{m\to\infty} \bar{x}_m$

3) $\lim\limits_{m\to\infty} (\bar{x}_m, \bar{y}_m) = (\lim\limits_{m\to\infty} \bar{x}_m, \lim\limits_{m\to\infty} \bar{y}_m)$

Функцию $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ или $f: X \to \mathbb{R}^m$ где $X \subset \mathbb{R}^n$

можно записать в координатах

$\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$

$\bar{y} \in \mathbb{R}^m$

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n)$$
$$y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

$f_i : X \to \mathbb{R}^1$ $(i = 1, \dots, m)$

Теорема 1. Функция $f: X \to \mathbb{R}^m$ (где $X \subset \mathbb{R}^n$) непр в точке $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \in X \Leftrightarrow$ все координатные ф-ии $f_i : X \to \mathbb{R}^1$ $(i = 1, \dots, m)$ непр в точке $\bar{x}_0$

Св-в непр. ф-ий

Док-во сам-но

Теорема 2 Арифметические (линейные) свойства

Если $f: X \to \mathbb{R}^m$ и $g: X \to \mathbb{R}^m$ $(X \subset \mathbb{R}^n)$ непр в точке $\bar{x}_0 \in X$ (или $\forall \bar{x} \in X$), то

1) $f + g$ непр в $\bar{x}_0$ (или на X)

2) αf (где $\alpha \in \mathbb{R}$) непр в $\bar{x}_0$ (или на X)

3) скал. произв. $(f(x), g(x))$ (в $\mathbb{R}^m$) непр в $\bar{x}_0$ (или на X)

Теорема 3. Композиция непрерывных функций непрерывна.